

# Cursillo de Matemáticas Discretas

por María Luisa Pérez Seguí

junio 2016

## 1. Conteo

**1.1 Ejemplo.** ¿Cuántas placas distintas hay con dos letras a la izquierda y tres números a la derecha?

Solución. Seguimos un procedimiento de casillas:

$$\underbrace{27 \times 27}_{\substack{\text{lugares} \\ \text{para letras}}} \times \underbrace{10 \times 10 \times 10}_{\substack{\text{lugares} \\ \text{para números}}} = 729\,000. \diamond$$

**1.2 Ejemplo.** En un concurso participan 10 estudiantes y se premia a los tres primeros lugares. ¿De cuántas formas pueden haber quedado distribuidos los 3 premios?

Solución. Utilizando el esquema de casillas (cada una representando un lugar), tenemos que el resultado es

$$\underline{10} \times \underline{9} \times \underline{8} = 720. \diamond$$

**1.3 Ejemplo.** De un grupo de 10 estudiantes quiere elegirse una comisión de 3. ¿Cuántas comisiones diferentes se pueden formar?

Solución. A diferencia entre del ejemplo anterior, aquí no importa el orden en la elección (por ejemplo, la sucesión Ana-Beto-Carlos representa la misma comisión que Beto-Carlos-Ana). Nuestro interés es entonces determinar en la cantidad  $10 \times 9 \times 8$ , en cuántas sucesiones aparece el mismo conjunto de alumnos. Para responder esto conviene plantear esta parte del ejemplo al revés: Dado un conjunto fijo de 3 personas, por ejemplo el formado por Ana ( $A$ ), Beto ( $B$ ) y Carlos ( $C$ ), ¿de cuántas formas se pueden ordenar estos 3; esto es las *permutaciones* de 3 elementos:  $3! = 6$ . Entonces, en el producto  $10 \times 9 \times 8$ , cada grupo de 3 personas se está contando 6 veces y la respuesta al ejemplo es

$$\frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = 120. \diamond$$

En lo que sigue, para  $n$  natural, denotamos

$$[n] = \{1, 2, \dots\}.$$

**1.4 Definición.** Si  $0 \leq r \leq n$ , el número de colecciones con  $r$  elementos que se pueden seleccionar dentro de un conjunto de  $n$  elementos (el orden no importa) se llama *combinaciones de  $n$  en  $r$*  y se denota por  $\binom{n}{r}$ .

**1.5 Nota.** En el ejemplo 1.3,  $n = 5$  y  $r = 3$  y la respuesta es  $\binom{5}{3}$ .

Si  $r \geq 1$ , entonces

$$\binom{n}{r} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(r-1))}{r!}.$$

Para  $r = 0$ , se tiene  $\binom{n}{0} = 1$ . En ambos casos, tomando en cuenta que  $0! = 1$ , se puede escribir

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

**1.6 Ejemplo.** Un grupo de 20 personas quiere dividirse en 4 equipos de 5 personas cada uno. ¿De cuántas formas distintas es posible hacer la distribución?

Solución. Empezamos por escojamos uno por uno los equipos, en orden. La elección del primer equipo puede hacerse de  $\binom{20}{5} = 15\,504$  formas; para elegir el segundo equipo ya sólo habrá 15 personas de dónde escoger, por tanto éste se podrá elegir de  $\binom{15}{5} = 3\,003$  formas. Análogamente, el tercer equipo se puede escoger de  $\binom{10}{5} = 252$ ; el cuarto equipo quedará formado automáticamente con las 5 personas restantes ( $\binom{5}{5} = 1$ ). Ahora debemos observar que el orden de los equipos no importa, así que hay que dividir entre  $4!$ . El resultado es

$$\frac{15\,504 \times 3\,003 \times 252 \times 1}{24} = 488\,864\,376. \diamond$$

## 1.1. Fórmulas importantes

**1.7 Proposición.** Si  $0 \leq r \leq n$ , entonces

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

Demostración. Para  $0 \leq k \leq n$ , sea  $\mathcal{S}_k$  la familia de subconjuntos de  $[n]$  que tienen  $k$  elementos. Entonces tenemos la biyección  $f : \mathcal{S}_r \rightarrow \mathcal{S}_{n-r}$  que manda cada conjunto en su complemento.  $\diamond$

**1.8 Proposición.** *Fórmula de Gauss.* Si  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Demostración. El lado derecho cuenta las colecciones de 2 elementos que pueden escogerse dentro de un conjunto de  $n+1$  elementos. Veamos que el lado izquierdo también cuenta esto. Para  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ , ponemos los subconjuntos de  $X$  que tienen dos elementos en una lista, como sigue:

$$\begin{array}{ccccccc} \{x_1, x_2\}, & \{x_1, x_3\}, & \{x_1, x_4\}, & \cdots & \{x_1, x_{n+1}\}, \\ & \{x_2, x_3\}, & \{x_2, x_4\}, & \cdots & \{x_2, x_{n+1}\}, \\ & & \{x_3, x_4\}, & \cdots & \{x_3, x_{n+1}\}, \\ & & & & \vdots \\ & & & & \{x_{n-1}, x_{n+1}\}. \end{array}$$

De la lista ya es claro lo que queríamos probar.  $\diamond$

**1.9 Proposición.** Para todo  $n$  natural,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Demostración. Bastará establecer una correspondencia biyectiva entre el número de subconjuntos de un conjunto con  $n$  elementos y las sucesiones de longitud  $n$  que constan de los símbolos  $S$  y  $N$ . Primero notemos que para determinar un subconjunto hay que decir si cada elemento pertenece ( $S$ ) o no ( $N$ ) al subconjunto. Esto podemos hacerlo usando el orden natural en  $[n]$ . Por ejemplo, para el conjunto  $X = \{a, b, c\}$  ( $n = 3$ ), la correspondencia es:

$$\begin{array}{ll} \{a, b, c\} & \leftrightarrow SSS \\ \{a, b\} & \leftrightarrow SSN \\ \{a, c\} & \leftrightarrow SNS \\ \{b, c\} & \leftrightarrow NSS \\ \{a\} & \leftrightarrow SNN \\ \{b\} & \leftrightarrow NSN \\ \{c\} & \leftrightarrow NNS \\ \{\} & \leftrightarrow NNN. \diamond \end{array}$$

**1.10 Teorema.** *Teorema del Binomio de Newton.* Sean  $a$  y  $b$  números arbitrarios y sea  $n$  un número natural. Entonces

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

Demostración. La expresión  $(a + b)^n$  significa que tenemos que multiplicar  $a + b$  consigo mismo  $n$  veces. Entonces, al desarrollar todo el producto, los términos que obtenemos están dados por todas las posibles elecciones de los números  $a$  o  $b$  en cada uno de los  $n$  factores (por ejemplo,  $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ). Así, los términos obtenidos son de la forma  $a^s b^r$ , con  $0 \leq s, r \leq n$  y  $s + r = n$ , es decir,  $s = n - r$ . Ahora notemos que  $a^{n-r} b^r$  aparece cada vez que se eligió  $b$  en  $r$  de los factores y  $a$  en el resto, así que el número de veces que aparece este término es  $\binom{n}{r}$ . Al agrupar términos semejantes tenemos la fórmula deseada.  $\diamond$

**1.11 Ejemplo.** En una bolsa hay 3 pelotas rojas y 2 azules. Se quiere formar una fila con todas ellas. ¿De cuántas maneras distintas puede quedar la fila?

Solución. Primera forma. Consideremos todas las permutaciones de las 5 pelotas y contemos cuántas de esas permutaciones son indistinguibles entre sí. Las permutaciones de las 5 pelotas sabemos que son  $5! = 120$ . En cualquiera de las permutaciones fijémonos en la ubicación de las pelotas rojas; por ejemplo — *roja — roja roja*. éstas pueden revolverse entre sí ( $3!$  veces) formando colecciones indistinguibles, y lo mismo ocurre con las del otro color. Vamos a explicar lo anterior con más detalle: Denotemos las pelotas rojas por  $R_1, R_2$  y  $R_3$ , y las azules por  $A_1$  y  $A_2$ . Entonces las siguientes listas (en las que se han permutado las rojas pero se han dejado fijas las azules) representan la misma colección:

$$\left( \begin{array}{ccccc} A_1 & R_1 & A_2 & R_2 & R_3 \\ A_1 & R_1 & A_2 & R_3 & R_2 \\ A_1 & R_2 & A_2 & R_1 & R_3 \\ A_1 & R_2 & A_2 & R_3 & R_1 \\ A_1 & R_3 & A_2 & R_1 & R_2 \\ A_1 & R_3 & A_2 & R_2 & R_1 \end{array} \right).$$

Estas  $3!$  listas deben considerarse como una sola. Además, en cada una de ellas también se pueden revolver las azules entre sí ( $2!$  permutaciones). Entonces al considerar las permutaciones de las 5 pelotas, cada arreglo se está contando  $3! \times 2! = 12$  veces en lugar de 1. La respuesta al ejemplo es pues  $\frac{5!}{3!2!} = 10$ .

Segunda forma. Primero podemos contar las posibilidades para colocar las pelotas rojas en los 5 lugares disponibles; esto nos dará la elección de 3 lugares, que puede hacerse de  $\binom{5}{3} = 10$  maneras. Para colocar las 2 azules ya sólo sobran 2 lugares así que esto se puede hacer de  $\binom{2}{2} = 1$  forma. El resultado es  $10 \times 1 = 10$ .  $\diamond$

**1.12 Ejercicio.** Probar la *Fórmula de Pascal*:

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1},$$

para  $r$  y  $n$  números enteros con  $0 \leq r < n$ .



## 2. Probabilidad Discreta

Intuitivamente, la probabilidad calcula la proporción de casos en los que cierto experimento ocurre en relación con el total de resultados posibles.

El conjunto de todos los resultados posibles de un *experimento* se llama *espacio muestral*, que denotamos por  $\Omega$ . A los subconjuntos de  $\Omega$  a los que les calculamos la probabilidad se les llama *sucesos* o *eventos*.

La probabilidad es una función  $P$  que va del conjunto de sucesos al intervalo real  $[0, 1]$ .

### Propiedades.

- $P(\emptyset) = 0$ ,  $P(\Omega) = 1$ .
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .
- Si  $B$  es el complemento de  $A$  entonces  $P(B) = 1 - P(A)$ .
- Si  $A \subset B$  entonces  $P(A) \leq P(B)$ .
- La probabilidad de que ocurra primero  $A$  y luego  $B$  es  $P(A) \cdot P(B)$ . (Esto se debe pensar dentro de  $\Omega \times \Omega$ .)

Analizamos algunos ejemplos en los que el espacio muestral  $\Omega$  es finito y se define convenientemente el espacio muestral de manera que todos los resultados del experimento tengan la misma probabilidad de ocurrir. En este caso, la probabilidad de que ocurra un suceso  $A$  es

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

**2.1 Ejemplo.** Calcular la probabilidad de que al lanzar una moneda 3 veces se muestren al menos dos águilas.

Solución. Aquí podemos definir

$$\Omega = \{aaa, aas, asa, saa, ass, sas, ssa, sss\},$$

el suceso es  $A = \{aas, asa, saa, aaa\}$  y la probabilidad buscada es  $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ .  $\diamond$

**2.2 Ejemplo.** Determinar la probabilidad de que al lanzar dos dados lo que sumen las caras que se ven arriba sea 6.

Solución. Conviene definir  $\Omega = [6] \times [6]$  y entonces

$$A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\},$$

de donde la probabilidad es  $\frac{5}{36} \sim 0.14$ .  $\diamond$

**2.3 Ejemplo.** Dentro de un grupo de 4 caballos numerados del #1 al #4 se ha observado que la frecuencia con que el caballo #1 gana es el doble que con la que gana el #2; que éste a su vez gana el doble de veces que el #3, y que el #3 gana el doble de veces que el #4. Encontrar la probabilidad de que en la próxima carrera el caballo ganador sea el #3.

Solución. Tenemos que representar en el espacio muestral las condiciones de que unos ganan el doble de veces que otros. Podemos entonces asignar al caballo 4 el número 1, al caballo 3 los números 2 y 3, al caballo 2 los números 4, 5, 6 y 7, y al caballo 1 los números del 8 al 15. De esta manera  $\Omega = [15]$ ,  $A = \{2, 3\}$  y la probabilidad es  $\frac{2}{15} \sim 0.13$ .  $\diamond$

**2.4 Ejemplo.** Encontrar la probabilidad de que al lanzar una moneda al aire 10 veces caigan exactamente 5 águilas.

Solución. Como antes, escribamos  $a$  por águila y  $s$  por sol. El espacio muestral  $\Omega$  consta de todas las sucesiones de longitud 10 formadas por  $a$  y  $s$ , de manera que  $|\Omega| = 2^{10} = 1024$ . El suceso consta de los elementos de  $\Omega$  que tienen exactamente 5  $a$ 's, así que  $|A|$  es el número de formas en que se pueden escoger 5 posiciones (donde aparezcan las  $a$ 's) dentro de un total de 10, es decir,  $\binom{10}{5} = 252$ . Entonces  $P(A) = \frac{252}{1024} \sim 0.25$ .  $\diamond$

**2.5 Ejemplo.** ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger dos subconjuntos de 4 elementos dentro de un conjunto de 10 elementos, los subconjuntos tengan al menos un elemento en común?

Solución. Es más fácil contar la probabilidad contraria, es decir, la probabilidad de que los dos subconjuntos escogidos no tengan elementos en común. Consideremos distintos espacios muestrales  $\Omega$  y los respectivos sucesos  $A$  con complemento  $\neg A$ :

*Primera forma.* Sea  $\mathcal{P}_4 = \{A \subset [10] : |A| = 4\}$ , es decir,  $\mathcal{P}_4$  tiene por elementos a los subconjuntos de  $[10]$  que tienen 4 elementos. Tomemos  $\Omega = \mathcal{P}_4 \times \mathcal{P}_4$ . En este caso  $|\neg A| = \binom{10}{4} \binom{6}{4}$ , así que

$$P(A) = 1 - P(\neg A) = 1 - \frac{\binom{10}{4} \binom{6}{4}}{\binom{10}{4}^2} = 1 - \frac{\binom{6}{4}}{\binom{10}{4}} = 1 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1 - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = 1 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{13}{14}.$$

*Segunda forma.* Sea  $\mathcal{P}_4$  como arriba. Supongamos que un conjunto de 4 elementos ya está escogido; entonces queremos calcular la probabilidad de que al escoger otro conjunto, éste sea ajeno con el primero. En este caso tomemos  $\Omega = \mathcal{P}_4$ . Aquí  $|\neg A| = \binom{6}{4}$ ,  $|\Omega| = \binom{10}{4}$  y

$$P(A) = 1 - P(\neg A) = 1 - \frac{\binom{6}{4}}{\binom{10}{4}} = 1 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1 - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = 1 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{13}{14}. \diamond$$

**2.6 Ejercicio.** Supongamos que de un grupo de 10 enfermedades cada una tiene probabilidad  $\frac{1}{10}$  de atacar a un animal determinado a lo largo de su vida. ¿Qué probabilidad tiene ese animal de enfermarse de al menos una de esas enfermedades?

## 2.1. Probabilidad infinita discreta.

Para el siguiente ejemplo debemos recordar que para cualquier número  $x \neq 1$ , si  $n$  es natural, entonces

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

lo cual se comprueba fácilmente haciendo la multiplicación  $(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)(1 - x)$ .

**2.7 Ejemplo.** Se lanza una moneda al aire hasta que salga águila por primera vez. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera vez que salga águila sea en un lanzamiento par (es decir en el segundo o en el cuarto, etc.)?

Solución. Conviene tomar  $\Omega = \mathbb{N}$  en donde cada  $n \in \Omega$  representa el primer lugar en el que apareció águila. Entonces  $P\{1\} = \frac{1}{2}$ ,  $P\{2\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$  y, en general,  $P\{n\} = \frac{1}{2^n}$ ; si  $A$  es un suceso con más de un elemento, se define  $P(A)$  usando (P3). Entonces es claro que también se satisface (P2). El axioma (P1) se satisface pues  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$ .

En este caso el suceso es  $B = \{2, 4, 6, \dots\}$  y

$$P(B) = P\{2\} + P\{4\} + P\{6\} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}. \diamond$$

## 2.2. Esperanza

Dado un conjunto muestral (discreto)  $\Omega$ , una *variable aleatoria (discreta)* en  $\Omega$  es una función

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Para  $r$  número real consideramos el suceso

$$[X = r] = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = r\} = X^{-1}(r).$$

**2.8 Definición.** Sea  $X$  una variable aleatoria discreta. La *esperanza, media, valor esperado, promedio o primer momento* de  $X$ , denotado por  $E(X)$ , es el promedio de los valores de  $X$ , considerando la repetición, es decir,

$$E(X) = \sum_{r \in \mathbb{R}} r \cdot P[X = r].$$

En el caso finito, la esperanza también se puede calcular como

$$E(X) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega),$$

lo cual coincide con nuestra idea de promedio de valores.



**2.9 Ejemplo.** ¿Cuál es el valor esperado de la suma de lo que muestren dos dados que se lanzan?

Solución. En este caso,  $\Omega = [6] \times [6]$  y la variable aleatoria está definida por  $X(a, b) = a + b$ . La esperanza de  $X$  es

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \cdot p_X(2) + 3 \cdot p_X(3) + 4 \cdot p_X(4) + \cdots + 11 \cdot p_X(11) + 12 \cdot p_X(12) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \cdots + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} \\ &= \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + \cdots + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 1}{36} \\ &= \frac{252}{36} = 7. \diamond \end{aligned}$$

**2.10 Ejemplo.** Se escogen al azar 3 números distintos entre el 1 y el 100. En promedio, ¿cuál es el valor del menor de esos tres?

Solución. El 1 aparece como menor en  $\binom{99}{2}$  ternas, el 2 en  $\binom{98}{2}$ , etc., así que la respuesta es

$$\frac{1 \cdot \binom{99}{2} + 2 \cdot \binom{98}{2} + \cdots + 98 \cdot \binom{2}{2}}{\binom{100}{3}}. \diamond$$

**2.11 Ejemplo.** El experimento consiste en lanzar una moneda al aire hasta que salga águila por primera vez. ¿En qué lanzamiento se espera que esto ocurra?

Solución. Aquí consideramos la variable aleatoria  $X$  que asigna, a cada sucesión infinita de  $a$ 's y  $s$ 's, el primer lugar en el que aparece  $a$  (si no aparece, podríamos asignarle cualquier valor no natural, por ejemplo  $-1$ , con probabilidad 0). Observemos que  $P[X = i] = \frac{1}{2^i}$  pues los primeros  $i - 1$  tiros deben ser sol (cada uno con probabilidad de  $\frac{1}{2}$ , y el último debe ser águila (también con probabilidad de  $\frac{1}{2}$ ):

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots \\ &= \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \right) + \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \right) + \left( \frac{1}{8} + \cdots \right) + \left( \frac{1}{16} + \cdots \right) + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2. \diamond \end{aligned}$$

**2.12 Ejercicio.** En cierto examen de opción múltiple con 5 opciones en cada respuesta y 100 preguntas se califica como sigue: por cada respuesta correcta se otorga +1 punto,

por cada respuesta incorrecta se otorga  $-\frac{1}{3}$  de punto, y por cada pregunta sin contestar se otorgan 0 puntos. Qué calificación esperaría obtener alguien que contestara todo el examen al azar?

Dados un conjunto  $\{X_i : i = 1, 2, \dots, k\}$  de variables aleatorias en un conjunto muestral  $\Omega$  y reales  $c_1, c_2, \dots, c_k$ , definimos otra variable aleatoria  $X = \sum_i c_i X_i$  por  $X(\omega) = \sum_i c_i X_i(\omega)$ .

**2.13 Proposición.** (a) Si  $X$  es una variable aleatoria constante tal que  $X(\omega) = c$  para todo  $\omega \in \Omega$ , entonces  $E(X) = c$ .

(b) *Linealidad de la esperanza.* Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son variables aleatorias en  $\Omega$  y  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son reales, entonces

$$E\left(\sum_i c_i X_i\right) = \sum_i c_i E(X_i).$$

Demostración. (a)  $P[X = c] = 1$  y  $P[X = a] = 0$  si  $a \neq c$ .

(b) Hagamos el caso finito para ilustrar (el caso infinito tiene demostración más rebuscada). Sea  $X = \sum_i c_i X_i$ . De la definición tenemos

$$\begin{aligned} E(X) &= E\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right) = \sum_{\omega \in \Omega} \left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{i=1}^n c_i X_i(\omega) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} X_i(\omega) = \sum_{i=1}^n c_i E(X_i). \quad \diamond \end{aligned}$$

**2.14 Ejemplo.** A una fiesta asisten  $n$  personas. Cada una lleva un regalo y éstos se sortean, de manera que a cada persona le toque un regalo. ¿A cuántas personas se espera que les toque su propio regalo?

Solución. Aquí podemos pensar que el espacio muestral consta de todas las permutaciones  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  de  $n$  elementos, y la variable aleatoria  $X$  que nos interesa calcula el número de puntos fijos, es decir, cuántos  $a_i$  son iguales a  $i$  (por ejemplo, si  $n = 8$ , en la permutación  $(4, 1, 3, 8, 2, 6, 5, 7)$  los puntos fijos son dos: en 3 y en 6). Definamos, para cada  $i \in [n]$ , la variable aleatoria que tiene el valor 1 cuando  $i$  es punto fijo y 0 cuando no. Entonces  $X = \sum_i X_i$ ,

$$E(X_i) = 0 \cdot P[X_i = 0] + 1 \cdot P[X_i = 1] = P[X_i = 1] = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n},$$

y entonces

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n \frac{1}{n} = 1. \quad \diamond$$

**2.15 Ejercicio.** Dada una permutación  $(a_1, \dots, a_n)$  de  $[n]$ , para  $i \geq 2$  digamos que  $a_i$  es *valle* si  $a_i$  es menor que ambos  $a_{i-1}$  y  $a_{i+1}$ . ¿Cuál es el valor esperado para el número de valles de una permutación de  $[n]$ ?

### 2.3. Probabilidad Condicional

Empezaremos esta sección con tres ejemplos en los que nuestra intuición falla si no se toman en cuenta condiciones que limitan al conjunto que tratamos. La conclusión es que hay que tener mucho cuidado con el universo en el que se trabaja.

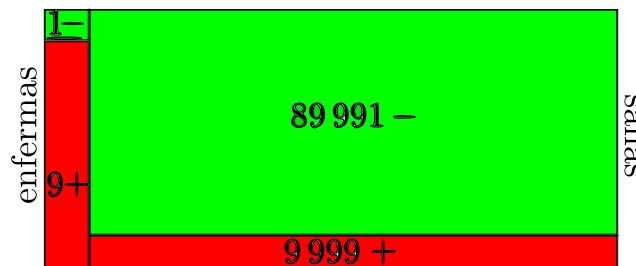
**2.16 Ejemplo.** En un programa de concurso hay tres puertas cerradas. Sólo una de ellas tiene detrás un premio. Un determinado concursante escoge una puerta  $A$ , sin abrirla; el animador (que sabe cuál de las puertas es la buena), abre una de las otras dos puertas,  $B$ , mostrando que no hay premio detrás, y le dice al jugador que abra una de las otras:  $A$  o  $C$ . Según las probabilidades, ¿qué puerta le conviene abrir al concursante (o es igual)?

Solución. Tenemos el espacio muestral  $\Omega = \{A, B, C\}$ . En un principio se tiene que la probabilidad es homogénea, así que  $P\{A\} = \frac{1}{3}$  y, por tanto,  $P\{B, C\} = \frac{2}{3}$ . Sin embargo luego se nos dice que no es  $B$ , así que  $P\{B\} = 0$ ; la probabilidad de  $A$  sigue siendo  $\frac{1}{3}$  pero la de  $\{C\}$  ahora tenemos que es  $\frac{2}{3}$ , así que le conviene cambiar de opinión y escoger la puerta  $C$  (con el doble de oportunidad de ganar).  $\diamond$

**2.17 Ejemplo.** En una población se sabe que la probabilidad de tener una cierta enfermedad es de  $\frac{1}{10000}$ . Una prueba de sangre es confiable en un 90%. Raúl se hizo la prueba y resultó positiva. Está muy asustado. ¿Tiene razón?

Solución. No tiene razón. La probabilidad de que tenga la enfermedad es muy remota como veremos a continuación:

Supongamos que en la población hay 100 000 personas. Hay 10 enfermas y 99 990 sanas. De las 10 enfermas, a 9 les sale positivo y a 1 le sale negativo. De las 99 990 sanas, a 9 999 (la décima parte) les sale positivo y al resto 89 991 les sale negativo.



La probabilidad de que esté enfermo es ¡menos de  $\frac{1}{1000}$ !:

$$\frac{9}{9 + 9999} = 0.0009. \diamond$$

**2.18 Ejemplo.** *Paradoja de Simpson.* En la admisión a una Facultad de Físico-Matemáticas resultó que, tanto en el departamento de Matemáticas como en el de Física, la proporción de mujeres aceptadas con respecto al de solicitantes fue mayor que la de hombres. El director publicó que, con respecto al número de solicitantes, la proporción total de mujeres aceptadas fue mayor que la de hombres. ¿Tiene razón?

Solución. No necesariamente. Es posible que en el departamento de Física sea mucho mayor la cantidad de hombres solicitantes que la de mujeres y que eso no ocurra en el departamento de Matemáticas, y las probabilidades relativas no compensan esa diferencia.

Por ejemplo, supongamos que en Matemáticas hubo 40 hombres solicitantes de los cuales se aceptó a 10, y que hubo 20 mujeres solicitantes de las cuales se aceptó a 10. Por otro lado supongamos que hubo 100 hombres solicitantes en Física de los cuales se aceptó a 90, mientras que hubo 10 solicitantes mujeres en Física y que todas fueron aceptadas.

| hombres  |    |    |    | mujeres  |          |    |
|----------|----|----|----|----------|----------|----|
| Mat (40) |    |    |    | Mat (20) | Fís (10) |    |
| 30       | 10 | 90 | 10 | 10       | 10       | 10 |

Tenemos que el total de hombres solicitantes fue de  $40 + 100 = 140$  y de ellos se aceptó a  $10 + 90 = 100$  y eso da una proporción de  $\frac{5}{7}$ . Por otro lado, del total de  $20 + 10 = 30$  mujeres solicitantes se aceptó a  $10 + 10 = 20$ , lo cual hace una proporción total de mujeres aceptadas de  $\frac{2}{3}$ .  $\diamond$

La razón detrás del ejemplo anterior es que en el departamento de Física es mucho mayor la cantidad de hombres solicitantes que la de mujeres, lo cual no ocurre en el departamento de Matemáticas, y las probabilidades relativas no compensan esa diferencia.

Dados dos eventos  $A$  y  $B$  tales que  $P(B) \neq 0$ , la *probabilidad condicional*  $P(A|B)$  de  $A$  dado  $B$  es la probabilidad que ocurra  $A$  cuando ya ocurrió  $B$ . Se calcula así:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

**2.19 Observación.** Sea  $A$  un suceso distinto del vacío y de  $\Omega$ . Entonces

(a)  $P(A|A) = 1$ .

(b)  $P(A|\neg A) = 0$ .

(c) Si  $A$  y  $B$  son ajenos y  $P(B) \neq 0$ , entonces  $P(A|B) = 0$ .

**2.20 Ejemplo.** Sea  $a_1, a_2, \dots, a_n$  una permutación de  $[n]$ . Sea  $A$  el suceso de que  $a_1 > a_2$  y sea  $B$  el suceso de que  $a_2 > a_3$ . ¿Cuál es la probabilidad de  $A$  dado  $B$ ?

Solución. Tenemos que  $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$  y  $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ , así que  $P(A|B) = \frac{1}{3}$  (el que  $B$  ocurra hace que  $A$  sea menos probable).  $\diamond$

**2.21 Teorema.** *Teorema de Bayes, primera versión.* Sea  $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  con los  $A_i$  sucesos ajenos por parejas y sea  $B$  un suceso. Entonces:

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \dots + P(B|A_n)P(A_n). \diamond$$

**2.22 Ejemplo.** En una competencia de fútbol se usan 3 estadios. Al equipo Kimo le conviene jugar en su estadio pues en él tiene probabilidad de 60% de ganar mientras que en los otros sólo tiene un 40%. Se sorteará el estadio donde le va a tocar jugar mañana. ¿Qué probabilidad tiene de ganar?

Solución. Aplicamos el Teorema de Bayes 2.21. Sea  $A_1$  el suceso de que el equipo Kimo juegue en su propio estadio y sea  $A_2$  el suceso de que juegue en otro. Entonces  $P(A_1) = \frac{1}{3}$  y  $P(A_2) = \frac{2}{3}$ . Sea  $B$  el suceso de que gane. Entonces

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = \frac{60}{100} \cdot \frac{1}{3} + \frac{40}{100} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{15}. \diamond$$

**2.23 Ejercicio.** Todas las tardes, Carmen va a la panadería. El 80% de las ocasiones encuentra su pan favorito. Se ha observado que si va entre 5 y 6, la probabilidad de que encuentre su pan favorito es de 90%, pero si va entre 6 y 7 su probabilidad baja a 40%. ¿Qué porcentaje de los días va a la panadería entre 6 y 7?

**2.24 Corolario.** *Teorema de Bayes (segunda versión).* Sean  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sucesos ajenos en un espacio muestral  $\Omega$  y tales que  $\Omega = \bigcup_i A_i$ . Si  $B$  es otro suceso en  $\Omega$ , entonces

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B|A_1)P(A_1) + \dots + P(B|A_n)P(A_n)}.$$

Demostración. Tenemos que

$$P(B|A_i)P(A_i) = P(B \cap A_i) \text{ y } P(B|A_1)P(A_1) + \dots + P(B|A_n)P(A_n) = P(B). \diamond$$

**2.25 Ejemplo.** Supongamos que se tienen dos monedas, una normal  $N$  (con caras  $A$  y  $S$ ) y otra defectuosa  $D$ , con dos águilas ( $A_1$  y  $A_2$ ). Se selecciona una de las monedas al azar y resulta que al lanzarla se obtiene águila. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido la moneda defectuosa?

Solución. Sean  $\Omega = \{A, S, A_1, A_2\}$  (el conjunto de los posibles resultados),  $N = \{A, S\}$  (el conjunto de los resultados de la moneda normal) y  $D = \{A_1, A_2\}$  (el conjunto de los resultados de la moneda defectuosa). Sea  $\mathcal{A} = \{A, A_1, A_2\}$  el suceso de que haya salido águila. Buscamos  $P(D|\mathcal{A})$ . Según 2.24 podemos calcularlo como

$$P(D|\mathcal{A}) = \frac{P(\mathcal{A}|D)P(D)}{P(\mathcal{A}|D)P(D) + P(\mathcal{A}|N)P(N)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \diamond$$

**2.26 Ejercicio.** Se lanzaron 2 dados al aire y uno de ellos mostró un número par. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos hayan sido pares?

**2.27 Ejercicio.** En un país hay tres ciudades  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ ;  $C_1$  tiene la mitad de los habitantes,  $C_2$  la tercera parte y  $C_3$  la sexta parte. Los porcentajes de votantes a favor del candidato  $A$  en cada ciudad son: en  $C_1$ , 25%, en  $C_2$ , 40% y en  $C_3$ , 70%.

(a) Si se escoge un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté a favor del candidato  $A$ ?

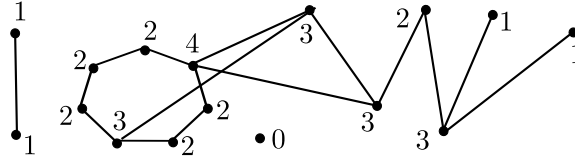
(b) Se escogió un votante y resultó que estaba a favor del candidato  $A$ . ¿Cuál es la probabilidad de que pertenezca a la ciudad  $C_1$ ?

### 3. Gráficas

Una gráfica (*finita, simple*) consta de un conjunto (finito)  $\mathcal{V}$  de *vértices*, y de otro  $\mathcal{A}$  de *aristas*: parejas (no ordenadas) de vértices (distintos).

Si una  $a = \{u, v\} \in \mathcal{A}$ , escribimos  $a = uv$  y decimos que  $u$  y  $v$  son los extremos de  $a$ .

El *grado* de  $u \in \mathcal{V}$  es el número  $\delta(u)$  de aristas que tienen a  $u$  como extremo.



Si  $a = uv \in \mathcal{A}$ , decimos que  $u$  y  $v$  son *adyacentes* y que  $a$  es *incidente* a  $u$  y a  $v$ . Dos aristas distintas con un vértice común son *incidentes*.

$\mathcal{N}(v)$  es el conjunto de vértices adyacentes a  $v$ .

**3.1 Proposición.** La suma de los grados es el doble del número de aristas.  $\diamond$

#### 3.1. Caminos y conexidad

Dados  $u, v \in \mathcal{V}$ , un *camino*  $C$  de  $u$  a  $v$  es una sucesión de vértices alternados con aristas  $C = (u = v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_n, v_n = v)$  tal que para cada  $i = 1, \dots, n$ , la arista  $a_i$  es incidente a (los vértices distintos)  $v_{i-1}$  y  $v_i$ .

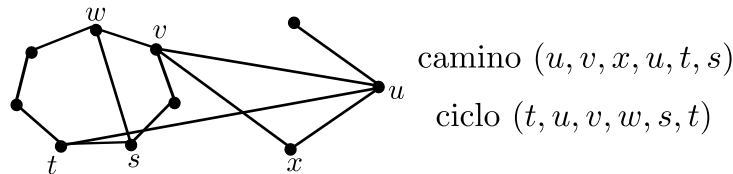
$C$  es *cerrado* si  $v_0 = v_n$ .

$C$  es *trayectoria* si no repite vértices.

$C$  es *paseo* si no repite aristas.

$C$  es *ciclo* si es camino cerrado que no repite vértices.

La *longitud* de  $C$ ,  $l(C)$ , es el número de aristas.



$\mathcal{G}$  es *conexa* si dados cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$  existe un  $uv$ -camino. Si no, es *disconexa*.

$\mathcal{G}_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{A}_1)$  y  $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{A}_2)$  son *isomorfas (iguales)* si existe biyección  $f : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$  tal que  $uv \in \mathcal{A}_1$  si, y sólo si,  $f(u)f(v) \in \mathcal{A}_2$ .

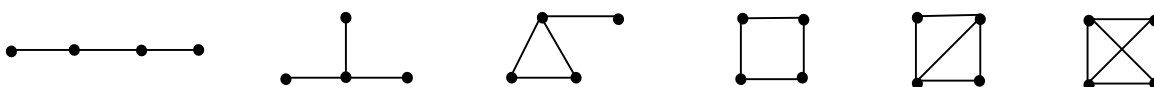
$\mathcal{T}_n$  es la trayectoria de longitud  $n$ ,  $\mathcal{C}_n$  es el ciclo de longitud  $n$ .

$\mathcal{H}$  es *subgráfica* de  $\mathcal{G}$  si el conjunto de vértices y de aristas de  $\mathcal{H}$  son subconjuntos del conjunto de vértices y del de aristas de  $\mathcal{G}$ , respectivamente.

Una *componente conexa* de  $\mathcal{G}$  es una subgráfica conexa maximal.

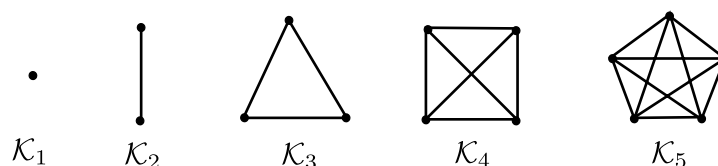
$k(\mathcal{G})$  es el número de componentes conexas de  $\mathcal{G}$ .

Hay 6 gráficas conexas no isomorfas con 4 vértices:

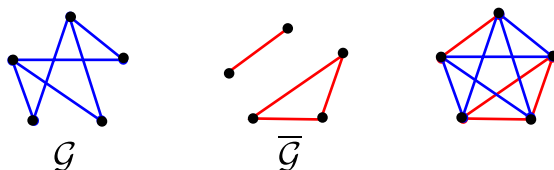


### 3.2. Gráficas completas y subgráficas

La *gráfica completa* con  $n$  vértices,  $\mathcal{K}_n$ , es aquella en la que por cada par de vértices hay una arista que los une.



Una gráfica con  $n$  vértices  $\mathcal{G}$  es subgráfica de  $\mathcal{K}_n$ ; su *complemento*,  $\overline{\mathcal{G}}$  es la subgráfica de  $\mathcal{K}_n$  formada por los mismos vértices de  $\mathcal{G}$  pero en el que las aristas son aquellas aristas de  $\mathcal{K}_n$  que no son aristas de  $\mathcal{G}$ .



Si  $v \in \mathcal{V}$ , la subgráfica de  $\mathcal{G}$  que tiene por conjunto de vértices a  $\mathcal{V} \setminus \{v\}$  y por conjunto de aristas a  $\mathcal{A} \setminus \{a \in \mathcal{A} : v \in a\}$  es  $\mathcal{G} - v$ .

Si  $a \in \mathcal{A}$ , la subgráfica  $(\mathcal{V}, \mathcal{A} \setminus \{a\})$  de  $\mathcal{G}$  se denota por  $\mathcal{G} - a$ .



### 3.3. Árboles

Una gráfica conexa sin ciclos es *árbol*. Un vértice de grado 1 es una *hoja*.

**3.2 Proposición.** Una gráfica conexa con  $n$  vértices es un árbol si, y sólo si, tiene  $n - 1$  aristas.

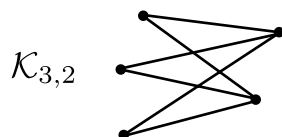
Demostración. ( $\Rightarrow$ ) Inducción sobre  $n$ . Si  $n = 1$ , el número de aristas es  $0 = n - 1$ . Sea  $n \geq 1$ . Observemos que hay al menos dos vértices de grado 1. Al quitar un vértice  $v$  de grado 1 a la gráfica, nos queda un árbol con  $n - 1$  vértices, por tanto, por *HI*, tiene  $n - 2$  aristas.

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que la gráfica tiene  $k \geq 1$  ciclos y quitemos una arista de un ciclo (la gráfica permanece conexa); repitamos esto hasta eliminar todos los ciclos; obtenemos un árbol con  $n$  vértices y  $n - 1 - k < n - 1$  aristas.  $\circlearrowleft \diamond$

### 3.4. Gráficas bipartitas

Una gráfica cuyo conjunto de vértices puede partirse en dos subconjuntos no vacíos de forma que no haya aristas dentro de un mismo conjunto es *bipartita*.

La *gráfica bipartita completa con  $(m, n)$  vértices*,  $\mathcal{K}_{m,n}$ , se obtiene poniendo todas las aristas posibles entre un conjunto de  $m$  vértices y otro de  $n$ .



**3.3 Proposición.**  $\mathcal{G}$  es bipartita si, y sólo si, no tiene ciclos impares.

Demostración. ( $\Rightarrow$ ) Coloreemos los vértices de uno de los conjuntos de rojo y el del otro de azul. En un ciclo los vértices alternan color.

( $\Leftarrow$ ) SPG  $\mathcal{G}$  es conexa. Pintemos un  $u \in \mathcal{V}$  de azul, los adyacentes a él de rojo; después los adyacentes a éstos de azul, etc. Como no hay ciclos impares, un vértice pintado de un color no se intentará pintar del otro. La coloración da la partición.  $\diamond$

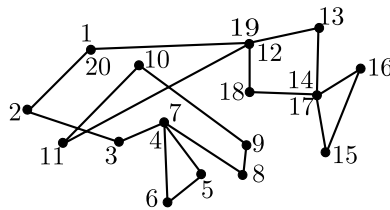
**3.4 Ejercicio.** Sea  $\mathcal{G}$  una gráfica en la que todos los vértices tienen el mismo grado. Si  $\mathcal{G}$  tiene 28 aristas, ¿cuántos vértices puede tener?

**3.5 Ejercicio.** Probar que si  $\mathcal{G}$  es una gráfica entonces ella o su complemento es conexa.

**3.6 Ejercicio.** Sea  $\mathcal{G}$  una gráfica con  $n$  vértices y  $A$  aristas. Probar que si  $A > \left(\frac{n}{2}\right)^2$  entonces  $\mathcal{G}$  tiene un *triángulo* (es decir, un ciclo de longitud 3). (*Sugerencia:* Suponiendo que hay no hay triángulos, toma un vértice de grado máximo y cuenta aristas.)

### 3.5. Paseos eulerianos y ciclos hamiltonianos

Decimos que  $\mathcal{G}$  es *euleriana* si tiene *paseo euleriano cerrado*, es decir un paseo cerrado que usa todas las aristas.

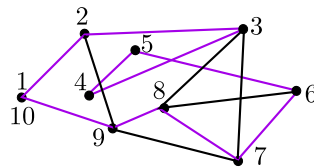


**3.7 Teorema. Teorema de Euler.**  $\mathcal{G}$  conexa es euleriana si, y sólo si todos los vértices tienen grado par. El paseo puede iniciar en cualquier lugar.

Demostración. ( $\Rightarrow$ ) Al pasar por cada vértice se usan dos aristas.

( $\Leftarrow$ ) Inducción sobre el número de aristas. Construimos un paseo lo más largo posible iniciando en cualquier vértice. Cada una de las partes conexas no usadas es una gráfica en la que todos los vértices son de orden par. Al paseo le intercalamos las partes faltantes usando la hipótesis de inducción.  $\diamond$

Una *gráfica hamiltoniana* es aquélla que tiene un *ciclo hamiltoniano*, es decir, un ciclo que usa todos los vértices.

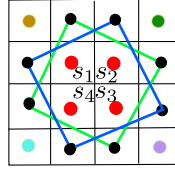


**3.8 Proposición. Criterio.** Si  $\mathcal{G}$  es hamiltoniana, entonces para todo  $S \subset \mathcal{V}$  no vacío,  $k(\mathcal{G} - S) \leq |S|$ .

**3.9 Ejemplo.** La gráfica  $\mathcal{G}$  cuyos vértices son los cuadros de un tablero de ajedrez de  $4 \times 4$  con una arista entre dos vértices si, y sólo si, los cuadros correspondientes se pueden alcanzar con un salto de caballo no es hamiltoniana.

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

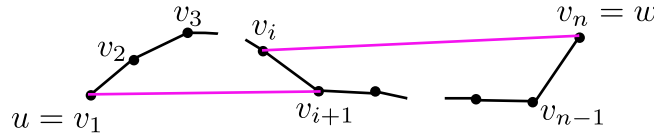
$$k(\mathcal{G} - S) = 6$$



**3.10 Teorema. Teorema de Ore.** Si  $\mathcal{G}$  tiene  $n \geq 3$  vértices y para cada  $u, w \in \mathcal{V}$  no adyacentes,  $\delta(u) + \delta(w) \geq n$ , entonces  $\mathcal{G}$  es hamiltoniana.

Demostración. SPG  $\mathcal{G}$  es maximal respecto a no tener ciclo hamiltoniano. Sean  $u$  y  $w$  dos vértices entre los cuales no hay arista (existen porque en  $\mathcal{K}_n$  hay ciclo hamiltoniano). Entonces hay trayectoria  $(u=v_1, \dots, v_n=w)$  que pasa por todos los vértices.

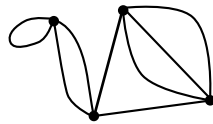
Sea  $i$  tal que  $uv_{i+1}$  y  $v_iw$  son ambas aristas (existe pues si no  $f : \mathcal{N}(w) \rightarrow \mathcal{V} \setminus \mathcal{N}(u)$  dada por  $f(v_i) = v_{i+1}$  es inyectiva,  $\mathcal{N}(u) \cap \text{Im}(f) = \emptyset$  y  $u \notin \mathcal{N}(u) \cup \text{Im}(f)$ , de donde  $\delta(u) + \delta(w) = |\mathcal{N}(u)| + |\mathcal{N}(w)| = |\mathcal{N}(u)| + |\text{Im}(f)| \leq n - 1$ .  $\circlearrowleft$



Entonces  $(u = v_1, v_2, \dots, v_i, w = v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}, v_1 = u)$ , es ciclo hamiltoniano.  $\circlearrowleft \diamond$

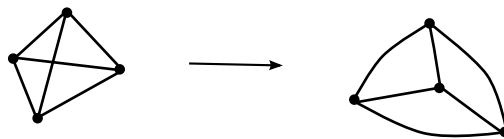
### 3.6. Gráficas aplanables

Consideramos aquí gráficas aplanables no simples: Puede haber *lazos* (aristas cuyos extremos coinciden) y *aristas múltiples* (varias aristas entre dos vértices).



Decimos que  $\mathcal{G}$  es *aplanable* si puede dibujarse en el plano de manera que las aristas no se intersecten entre sí salvo en los vértices que comparten. Ya dibujada así es *plana*.

**3.11 Ejemplo.**  $\mathcal{K}_4$  es aplanable.



En una gráfica plana, cualquier región delimitada por aristas es una *cara*, incluso la región exterior (no acotada).

**3.12 Teorema.** *Fórmula de Euler.* Si  $\mathcal{G}$  es plana y conexa,  $V$  es su número de vértices,  $A$  es su número de aristas, y  $C$  es su número de caras entonces  $V - A + C = 2$ .

Demostración. Inducción sobre  $A$ . Por ser  $\mathcal{G}$  conexa,  $A \geq V - 1$ . Entonces la BI es cuando  $\mathcal{G}$  es árbol (sólo hay una cara) y entonces es claro.

Supongamos  $A \geq V$ . Entonces  $\mathcal{G}$  tiene ciclos. Sea  $\mathcal{G}'$  la gráfica obtenida de  $\mathcal{G}$  al quitar una arista en un ciclo. Por HI,  $V' - A' + C' = 2$ , pero entonces el resultado es claro pues

$$\begin{aligned} V' &= V, \\ A' &= A - 1 \text{ y} \\ C' &= C - 1. \diamond \end{aligned}$$

**3.13 Proposición.**  $\mathcal{K}_5$  no es aplanable.

Demostración. Supongamos que lo es. Como  $V = 5$  y  $A = 10$ , entonces, por la fórmula de Euler,  $C = 2 - 5 + 10 = 7$ .

Pero todos los vértices están unidos entre sí por aristas, así que las caras son triángulos; además, cada arista pertenece exactamente a dos caras; entonces  $A = \frac{3C}{2} = \frac{3 \times 7}{2} \circlearrowleft. \diamond$

**3.14 Nota.** El *Teorema de Kuratowsky* afirma que una gráfica  $\mathcal{G}$  es aplanable si, y sólo si, ni  $\mathcal{K}_5$  ni  $\mathcal{K}_{3,3}$  están “contenidas” en  $\mathcal{G}$ .

**3.15 Ejercicio.** Sea  $\mathcal{G}$  una gráfica  $k$ -regular (todos los vértices tienen grado  $k$ ). Probar que si  $k = 8$  entonces es posible colorear las aristas de  $\mathcal{G}$  con rojo y azul de manera que a cada vértice lleguen dos aristas azules y dos rojas. Probar que lo anterior es falso para  $k = 10$ .

**3.16 Ejercicio.** Hay un tesoro en cada cubo de  $1 \times 1 \times 1$  de los 343 que forman un cubo de  $7 \times 7 \times 7$ . Un duende se encuentra en el cubo central; en cada momento puede pasar de un cubo a cualquier otro que comparta un cuadrado con el cubo donde está. Si regresa a un cubo por el que ya pasó, un monstruo le quita todos los tesoros que tiene hasta el momento. Las salidas están en las 8 esquinas del cubo. ¿Es posible que salga del cubo con los 343 tesoros?