Examen de admisión guía 2

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH
Marzo, 2021

Álgebra lineal

1. Demuestre o de contraejemplo:
   Sean V un K-espacio vectorial, v un vector en V y a un escalar en el campo K. Si $av = 0$, entonces $a = 0$ ó $v = 0$.

2. Encuentre matrices $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ con $A \neq I$ tales que de manera simultanea $BAB = I$ y $BA^{-1}B = I$ (la matriz I denota la identidad).

3. Encuetre una base para la intersección de los dos hiperplanos de $\mathbb{R}^4$ dados por
$$3x + y + 4z + w = 0,$$
$$2x - y - z + 2w = 0.$$

4. Sean $b \in \mathbb{R}$ una constante y $V_b \subseteq \mathbb{R}^2$ el espacio de soluciones de la ecuación $x - by = 0$. Sea $P_b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación que proyecta ortogonalmente cualquier punto de $\mathbb{R}^2$ en la recta V_b.
   (a) Calcule la matriz M_b asociada a P_b con respecto a la base canónica, y su rango.
   (b) Calcule la proyección de $(1, b)$ en V_b.
   (c) Calcule el límite $M_\infty = \lim_{b\to+\infty} M_b$. Determine si M_∞ es la matriz asociada a la proyección ortogonal de los puntos de $\mathbb{R}^2$ en alguna recta; en caso afirmativo determine dicha recta. ¿Puede dar una explicación geométrica de esto?

5. Se cuenta con 74 paletas, 72 dulces y 103 bombones, y se quieren dividir en paquetes, donde cada paquete debe contener alguno de los siguientes arreglos:
   (a) 3 paletas, 4 dulces y 10 bombones;
   (b) 2 paletas, 6 dulces y 1 bombón;
   (c) 5 paletas, 0 dulces y 7 bombones.

   Determine si es posible distribuir todas las paletas, dulces y bombones en paquetes de tipos (a), (b) y (c) de modo que no sobre ni falte nada a ningún paquete. En caso de que sí, diga cuántos paquetes de cada tipo habrá.

6. Sea $f(x) = |\log x|$. Diga si f es diferenciable en $x = 1$.

7. Suponga que g y h son funciones reales con dominio $\mathbb{R}$, que son continuas en $a \in \mathbb{R}$ y que $g(a) = h(a)$. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \leq a \\ h(x), & \text{si } x > a, \end{cases}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que f también es continua en a.

8. Sea f una función tal que

$$|f(x) - f(y)| < M|x - y|$$

para alguna M y cualesquiera x, y en $[0, 1]$. Pruebe que, para $n \geq 1$,

$$\left| \int_0^1 f(x)\, dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \right| < \frac{M}{2n}.$$

9. Sea $f_0 : [0, a] \to \mathbb{R}$ una función continua. Defínase $f_{n+1} : [0, a] \to \mathbb{R}$, para $n \geq 0$, mediante

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt.$$

(a) Pruebe que

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x - t)^{n-1} f_0(t)\, dt.$$

(b) Pruebe que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a cero en el intervalo $[0, a]$, es decir, pruebe que para todo $\epsilon > 0$, existe N tal que si $n > N$, entonces $|f_n(x)| < \epsilon$ se cumple para todo $x \in [a, b]$.

10. Sea f una función continua y positiva en $[a, b]$. Sea $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Pruebe que

$$M = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n\, dx}.$$