Examen de admisión guía 1

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH
Marzo, 2021

Álgebra lineal

1. Sea V el espacio de todas las funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ y sea
$$W = \{f \in V \,:\, f(x) = f(-x) = f(\overline{x}) = f(-\overline{x}) \text{ para toda } x \in \mathbb{C}\},$$
visto como $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Determine si W es subespacio de V.

2. Demuestre o de contraejemplo:
Sea $T : V \to V$ una transformación linal con V de dimensión finita. Si la dimensión de V es 7 y el rango de T es 4, entonces $T \circ T$ no es la transformación lineal cero.

3. Sea $\mathcal{L}_\theta$ la recta que se obtiene girando el eje X a la izquierda alrededor del origen un ángulo θ, $0 \leq \theta < 2\pi$. Sean R_θ y S las matrices
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$
respectivamente. Demuestre que $R_\theta S$ es la matriz que representa la reflexión en la recta $\mathcal{L}_{\theta/2}$ respecto a la base canónica.

4. Un ecosistema tiene moscas, arañas y lagartijas. Si el día n hay m moscas, a arañas y ℓ lagartijas, entonces el día $n+1$ habrá $3m - a - \frac{\ell}{2}$ moscas, $2a + \frac{m}{2} - l$ arañas y $\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + a$ lagartijas. Si el segundo día había 840 moscas, 600 arañas y 560 lagartijas, determine cuántos de cada especie había el primer día.

5. Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ con entradas en $\mathbb{R}$. Observe que A puede tener más renglones que columnas.

   (a) Demuestre que $A^T A$ es simétrica.

   (b) Demuestre que para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $A\mathbf{x} = 0$ si y sólo si $A^T A\mathbf{x} = 0$; esto es, los sistemas de ecuaciones $A\mathbf{x} = 0$ y $A^T A\mathbf{x} = 0$ tienen las mismas soluciones.

   (c) Demuestre que si las columnas de A son linealmente independientes entonces $A^T A$ es una matriz invertible.

6. Calcule el supremo e ínfimo de los conjuntos siguientes.

$$\text{(a) } \big\{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\big\}, \quad \text{(b) } \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < \sqrt{2}\}, \quad \text{(c) } (0,1) \cap \mathbb{Q}.$$

7. Sea f una función tal que $f'(x) = x^{-1}$ para toda $x > 0$ y $f(1) = 0$. Demuestre que para toda $x, y > 0$ se tiene que $f(xy) = f(x) + f(y)$.

8. (a) Pruebe que para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se cumple que

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

(b) Sean

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \qquad \text{y} \qquad b_n = a_n - \frac{1}{n}.$$

Pruebe que $b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n$. Argumente para demostrar que existe un y sólo un número c tal que $b_n < c < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

9. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definidas en $[a, b]$ que converge uniformemente[1] a f. Pruebe que $\int_a^b f_n(x)\, dx \to \int_a^b f(x)\, dx$ cuando $n \to \infty$.

10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y sea g definida, para $x \in \mathbb{R}$, mediante

$$g(x) = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} f(x + t)\, dt$$

en donde $\delta > 0$ es arbitraria. (a) Demuestre que g tiene derivada continua para toda $x \in \mathbb{R}$. (b) Dados, $a, b \in \mathbb{R}$, pruebe que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$ se cumple de manera uniforme[2] para $x \in [a, b]$.

[1] Para todo $\epsilon > 0$, existe N tal que si $n > N$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ se cumple para toda $x \in [a, b]$.

[2] Es decir, la δ depende de ϵ, pero no de x.