PARTIENDO PASTELES
DEGUSTACIONES MATEMÁTICAS

FERNANDO HERNÁNDEZ-HERNÁNDEZ

Resumen. En esta nota se resuelve la siguiente interrogante: Supóngase que se tienen dos pasteles en una mesa, que tienen forma muy irregular (incluso hoyos). ¿Hay manera de cortar ambos pasteles en dos partes iguales con un solo corte de cuchillo en línea recta? Se trata de mantener la discusión de manera muy elemental y se prefiere apelar a la intuición en lugar de introducir conceptos más técnicos.

1. Introduction

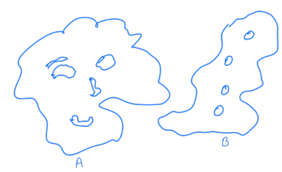
Esta nota es una versión extendida de mi reciente charla en el Curso de Inducción para aspirantes a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la UMSNH. Trata de un problema tangible que puede resolverse en su mayor parte con el material estudiado en el curso de Cálculo 1. Ciertamente algunas veces se tendrá que apelar a la intuición para evitar introducir conceptos más técnicos que se estudian en cursos más avanzados como son los de análisis matemático o de topología. En esos casos, se acompañan las ideas presentadas con anotaciones al pie de página observando por qué es posible proceder como se indica. Al final de la nota se presenta un problema accesible para todos los lectores y que será el desafío de esta nota.

El material aquí presentado es una modificación del que aparece originalmente en el libro de W. G. Chinn y N. E. Steenrod [2]; pero se hace hincapié en que lo verdaderamente importante para entender lo aquí presentado es abordado en el curso de Cálculo 1. Ese material puede bien leerse en el clásico libro de Spivak [3] o en el que acostumbro usar en mis cursos de Cálculo 1 (que es el mismo que usé como estudiante) y que altamente recomiendo para los estudiantes recién llegados a la facultad. El ejemplar de J. Angoa *et. al.* [1] también es un gran libro.

El problema del que se ocupa esta nota es como sigue:

- Supóngase que se tienen dos pasteles en una mesa, que tienen forma muy irregular (incluso hoyos). ¿Hay manera de cortar ambos pasteles en dos partes iguales con un solo corte de cuchillo en línea recta?

Para fijar ideas pensemos que tenemos dos pasteles, de nombres A el de la izquierda y B el de la derecha, que tienen forma muy irregular e incluso hoyos. Por ejemplo, A tiene 5 hoyos irregulares mientras que B tiene 4 hoyos. No parece un problema simple.



El caso simple es que los pasteles fueran perfectamente redondos; en tal caso haciendo el corte siguiendo la línea recta que une los centros de los círculos se tendría una manera de cortar ambos pasteles en partes iguales con un mismo corte en línea recta.

2. El resultado

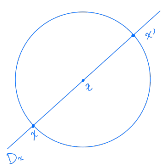
Una vez que se entiende cuál es el problema pasemos a presentar un resultado que responde afirmativamente a la pregunta planteada. Claro, se hace un poco de abstracción; se supone que los pasteles tienen masa homogénea y que cortarlos en partes iguales significa dividirlos en partes con la misma área (como si los pasteles fueran planos). Esta suposición no es esencial, al final de la nota se comenta que casi con los mismos métodos el problema puede resolverse para objetos de otras dimensiones también. Se prefirió presentar esta versión para mantener la mayor parte de la nota al nivel de Cálculo 1. Formalmente el resultado se escribe así:

Date: Agosto 2021.

Teorema 2.1. *Si A y B son dos regiones cerradas*[1] *y acotadas del mismo plano, existe una recta del plano que divide a cada región en dos de área la mitad.*

Como se dijo antes, se esbozará la demostración apelando mucho a la intuición en algunas partes. Hay una circunferencia C suficientemente grande de modo que A y B están contenidos en el "interior" de C.

Sea z el centro de C y sea $r > 0$ su radio. Denote por x' al punto diametralmente opuesto a $x \in C$. Sea D_x el diámetro con extremos x y x'.

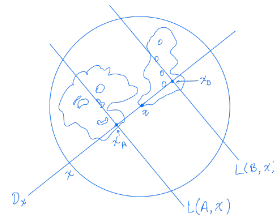


Primero se usarán dos proposiciones para mostrar la solución del problema; es decir, una demostración del teorema y después se esbozará con suficiente amplitud la demostración de cada una de las proposiciones.

Proposición 2.2. *Para cualquier $x \in C$, la familia de todas las rectas perpendiculares a D_x tiene una, y sólo una, recta $L(A, x)$ que divide a A en dos partes de igual área; y una, y sólo una, recta $L(B, x)$ que divide a B en dos partes de la misma área.*

Suponga por un momento que esta proposición es válida, se usará el resultado en ella para mostrar cómo resolver el problema. Designe por x_A y por x_B los puntos donde D_x corta a $L(A, x)$ y a $L(B, x)$, respectivamente.

[1]Aquí por regiones cerradas debe entenderse cerrados regulares y conexos; cerrados regulares significa que tienen interior denso y ser conexos significa ser de una sola pieza.



Sobre D_x hay un "sistema natural" de coordenadas donde 0 corresponde a z y la parte positiva está de z hacia x. Observe que no se puede decir a la derecha de z o a la izquierda porque eso dependerá de hacia qué lado el punto "que manda", el punto x, se encuentra. Se planea usar al punto "que manda" como una variable.

Sean $g_A(x)$ y $g_B(x)$, las coordenadas de x_A y de x_B, respectivamente, según el sistema coordenado sobre D_x. Ahora para cada $x \in C$, sea

$$h(x) = g_A(x) - g_B(x).$$

Básicamente la función h mide "la distancia" que hay entre el punto x_A y el punto x_B; claro es una distancia con signo. Una propiedad muy importante de la función h es que

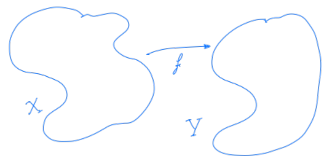
$$h(x) = -h(x'),$$

para cualquier $x \in C$. Esto se debe a que $x'_A = x_A$ y $x'_B = x_B$, pues $D_x = D_{x'}$. Sin embargo, la dirección positiva de $D_{x'}$ es la opuesta a la de D_x. Por eso, $g_A(x) = -g_A(x')$ y $g_B(x) = -g_B(x')$. Así,

$$\begin{aligned} h(x) = g_A(x) - g_B(x) = \\ = -g_A(x') + g_B(x') = -h(x'). \end{aligned}$$

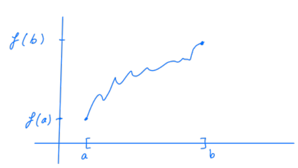
Proposición 2.3. *La función h es continua.*

Uno de los conceptos cumbres en matemáticas es el concepto de *función* y de él la propiedad de ser *continua* es sin duda la más importante. En la charla se intentó dar una idea intuitiva de qué es la continuidad; para esos muchachos que con ilusión están por entrar a Cálculo 1 es difícil imaginar lo profundo que es el concepto de continuidad y todas las ideas que están encanillando ese concepto sobresaliente.



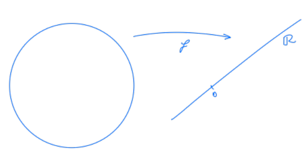
Para los propósitos de esta nota conviene recordar una de las interpretaciones de que una función f que va de un espacio X (que tiene una cierta manera de medir cercanía) hacia un espacio Y (que seguramente tiene otra manera de medir cercanía)[2], es una función continua en todo X si dado cualquier punto $p \in X$, puntos x que están *suficientemente* cercanos a p tienen imágenes cercanas a $f(p)$. Para decirlo en términos más coloquiales: puntos cerquita van a dar a puntos cercanos. Como se dijo antes, el concepto formal de continuidad no es sencillo; pero sí es fácil recordar esta idea de que puntos cerquita van a dar a puntos cercanos. Es quizás más importante recordar esta idea intuitiva de la continuidad que la definición formal misma.

Teorema 2.4 (del Valor Intermedio)**.** *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y $c \in \mathbb{R}$ es un punto tal que $f(a) < c < f(b)$; entones existe un $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = c$.*



En verdad este es uno de los resultados centrales del curso de Cálculo 1; quizás es El Teorema de Cálculo 1. Entre las muchas consecuencias que pueden ser derivadas de este resultado el siguiente es de particular interés para esta nota.

Corolario 2.5. *Si C es una circunferencia y $f : C \to \mathbb{R}$ es continua, entonces existe $x \in C$ tal que $f(x) = f(x')$.*



[2]Adelante se necesitará esta idea general de funciones continuas puesto que trataremos con funciones de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$.

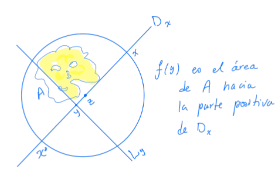
En efecto, defina una función auxiliar $\varphi : C \to \mathbb{R}$ por $\varphi(x) = f(x) - f(x')$, para cada $x \in C$. Se quiere un $x_0 \in C$ tal que $\varphi(x_0) = 0$. Note que φ es continua y que $\varphi(x) = -\varphi(x')$, para cada $x \in C$. Esto puede establecerse de manera muy similar a como se hizo con la función h; este es el primer ejercicio.

Fije $p \in C$ arbitrario. Si se le atinó y $\varphi(p) = 0$, se termina la demostración. Si no, $\varphi(p)$ y $\varphi(p')$ tienen signos diferentes y la semicircunferencia de p a p' es como un intervalo cerrado, $[a, b]$.[3] Dado que φ es continua, es una consecuencia del Teorema del Valor Intermedio que entre p y p' hay un x_0 tal que $\varphi(x_0) = 0$.

Regresemos a la demostración del teorema que nos ocupa en esta nota. Recuerde que $h : C \to \mathbb{R}$ y que $h(x) = g_A(x) - g_B(x)$. Por este corolario hay $x \in C$ tal que $h(x) = h(x')$. Como $h(x') = -h(x)$, necesariamente $h(x) = 0$ y esto implica que $x_A = x_B$ y que $L(A, x) = L(B, x)$. ¡Genial...! Esto completará la demostración del teorema.

Resta demostrar que existe una y sólo una recta $L(A, x)$, y claro también para $L(B, x)$, y que h es continua. Se empieza por lo primero.

Fije un $x \in C$. Para cada punto $y \in D_x$, sea L_y la recta que pasa por el punto y y es perpendicular a D_x. Sea $f(y)$ el área[4] de A que L_y determina hacia la parte positiva de D_x.



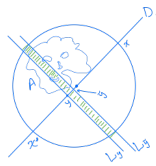
Primero f es continua. En efecto, si $\widetilde{y}$ es otro punto en D_x que está cercano a y; entonces

$$|f(y) - f(\widetilde{y})| \leq 2r \cdot d(y, \widetilde{y}),$$

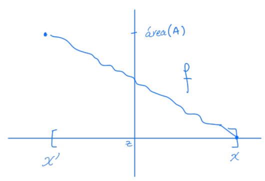
donde $d(y, \widetilde{y})$ es la distancia en el plano de y a $\widetilde{y}$.

[3]Aquí está escondida la idea de un homeomorfismo.

[4]Se podría objetar por qué la región A tiene área. En el caso más general esa área se podría interpretar como la medida de Lebesgue de esa parte de la región A que se supone cerrada y por lo tanto medible.



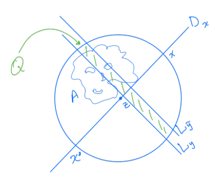
Además, $f(x')$ es toda el área de A y $f(x) = 0$.



Entonces por el Teorema del Valor Intermedio hay un $y_0 \in D_x$ tal que

$$f(y_0) = {}^1\!/_2 \cdot \acute{a}rea(A).$$

Por lo tanto, sí hay una recta perpendicular a D_x y que corta A en dos mitades iguales en área. Además tal recta es única. Si L_y y $L_{\widetilde{y}}$ dividen a A por la mitad y, digamos, y está más a la "izquierda" $\widetilde{y}$; entonces la tira Q entre ambas rectas es un conjunto abierto y su complemento está separado en dos partes iguales:

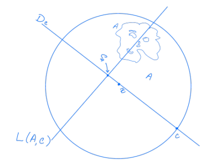


Una contiene el lado positivo de D_x determinado $L_{\widetilde{y}}$ y la otra el lado negativo de D_x determinado por L_y. Como A es de una sola pieza (conexo) y posee puntos en ambas pares, debe suceder que existe $p \in Q \cap A$. Por lo tanto $Q \cap A$ tiene área positiva[5]; consecuentemente $f(y) > f(\widetilde{y})$. Una contradicción con la suposición de que $f(y) = f(\widetilde{y})$. Así $L(A, x)$ existe y es única. Hasta aquí el esbozo de la demostración de la Proposición 2.2.

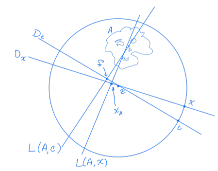
Observe que la unicidad de la recta $L(A, x)$ es necesaria para la buena definición de la función h. Para demostrar que $h = g_A - g_B$ es continua, basta demostrar que g_A es continua y, claro, que g_B lo es; pero es enteramente análogo. Se esbozará ahora que g_A es continua.

Sea $c \in C$, y sea c_A el punto donde $L(A, c)$ corta D_c

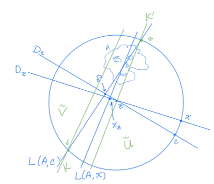
[5] Aquí se usa que las regiones son cerrados regulares.



Sea $x \in C$ cercano a c.



Considere los puntos u y v en que $L(A, c)$ corta a la circunferencia C. Se trazan por ellos dos rectas K y K' que son perpendiculares a D_x.



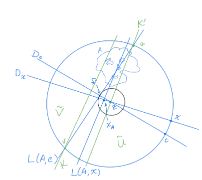
La recta $L(A, c)$ divide el interior de C en dos partes, U y V. La banda entre K y K' separa su complemento en el interior de C en dos partes, $\widetilde{U}$ y $\widetilde{V}$, con

$$\widetilde{U} \subseteq U, \qquad \widetilde{V} \subseteq V.$$

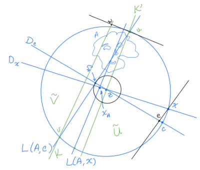
Por lo tanto, cada una de las partes $\widetilde{U}$ y $\widetilde{V}$ contiene como máximo la mitad del área de A. Se deduce que la recta $L(A, x)$ perpendicular a D_x y que divide a A por la mitad, se encuentra en la banda, lo mismo que el punto x_A. Debido a que la circunferencia con centro z y que pasa por c_A corta a D_x dentro de la banda, se deduce que

$$|g_A(x) - g_A(c)|$$

es menor que el ancho de la banda.



El ancho de la banda es $d(w, u)$. El punto w es el determinado por la intersección de la recta K y la perpendicular a ella que pasa por u.



En seguida el reto de esta nota.

Problema 2.6. ¿Demuestre que los triángulos $\triangle xze$ y $\triangle wvu$ son semejantes?

Aquí e es el pie de la perpendicular desde x a D_c. Entonces por semejanza

$$\frac{d(u,w)}{d(u,v)} = \frac{d(x,e)}{d(x,z)}.$$

Puesto que $r = d(x,z)$ y $d(u,v) \leq 2r$, esto representa

$$d(u,w) = \frac{d(u,v)}{d(x,z)} \cdot d(x,e) \leq 2d(x,e).$$

Y como $d(x,e) \leq d(x,c)$, se obtiene que

$$d(u,w) \leq 2d(x,c),$$

de aquí que g_A es continua. Esto completa el esbozo de la Proposición 2.3 y con ello se concluye con el esbozo de la demostración del Teorema 2.1.

3. Otras variantes

Se cierra esta nota presentando otras aplicaciones del Teorema del Valor Intermedio. Para obtener la conclusión, en cada una de ellas se debe inventar una función continua definida de manera adecuada en un espacio adecuado. Se dejará “al aire” esta parte con la esperanza de que el lector realice un ejercicio para imaginar cómo debe ser en cada caso la función.

- Raíces de polinomios.
- Maximizar o minimizar funciones también tiene que ver con el Teorema del Valor Intermedio.
- Supóngase que una pareja de ciclistas, obviamente de montaña, deciden pedalear a una montaña, pasar la noche allá y regresar por una ruta diferente al día siguiente. Suponga además que ambos días parten a la misma hora de la mañana y terminan a la misma hora de la tarde.

  Entonces, a alguna hora en ambos días estuvieron a la misma altura sobre el mismo nivel del mar.
- Si se tiene una mesa desnivelada en la taquería de la esquina, se puede elegir una pata y girar la mesa de modo que no quede tambaleante.
- Mismo problema que el de los pasteles pero en más dimensiones.
- A cada momento del día, hay dos lugares en la tierra que tienen la misma temperatura.

Referencias

[1] J. Angoa *et. al.*, *Cálculo Diferencial en Una Variable.* Textos Científicos, Beneméritta Universidad Autónoma de Puebla, 2005.

[2] W. G. Chinn y N. E. Steenrod, *Primeros Conceptos de Topología.* Alhambra S. A., 1975.

[3] M. Spivak, *Calculus.* Publish or Peish, Inc., 2008 (cuarta edición).

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH
Email address: fernando.hernandez@umich.mx