PANTANO-PANTANA
DEGUSTACIONES MATEMÁTICAS

FERRÁN VALDEZ
CCM UNAM
FERRAN@MATMOR.UNAM.MX

Resumen. En este texto hablaremos de superficies. La idea es que al terminar de leerlo el lector tenga una idea de cómo se clasifican las superficies. Es importante subrayar dos cosas. La primera es que por superficie entenderemos siempre (e insistiremos en esto) superficie *orientable*. No es necesario saber qué es esto para entender el texto. La segunda es que pondremos énfasis en las llamadas superficies *de tipo infinito*, que definiremos más adelante. Este tipo de superficies aparecen en distintos contextos matemáticos, y para esto sugerimos leer el último párrafo de este escrito. El contenido que presentamos aquí está pensado para alumnos de la primera mitad de una licenciatura en matemáticas. Como requerimiento es útil saber cosas básicas de topología como la definición de un espacio topológico, función continua y lo que es un homeomorfismo, aunque recordaremos algunos de estos. El texto tiene pasajes sencillos, otros que requieren una pausa para ponerse a pensar y su estilo es informal.

Una superficie es cualquier cosa que *localmente* se parece al plano. La recta real no es una superficie, ni el círculo, ni tampoco el espacio tridimensional. Para los que ya sepan un poco de superficies, de ahora en adelante superficie quiere decir superficie orientable. La primera superficie de la que quiero hablar es la esfera. Es una forma natural: las burbujas de jabón, la pelota de fútbol, los ojos, la luna y así. La segunda superficie de la que quiero hablar es el toro. Y aquí comienza un problema linguístico (al menos en el español) pues si bien esta palabra se usa para designar al macho de los animales del género *bos taurus*, la superficie de la que hablo no tiene cuatro patas ni cuernos, tiene forma de anillo, como los que nos ponemos en los dedos, como el que encantaba a Gollum. Y el problema es que luego anillo para los especialistas otra cosa, que también parece anillo pero no toro. La esfera y el toro no son la misma superficie, por eso es que las cadenas que cargan las anclas de los barcos se construyen enlazando toros y no esferas.

Ahora vamos a construir otras superficies. Para esto voy a introducir dos operaciones. Una la llamaré ponchar, la otra sumar. Para ponchar sólo se necesita una superficie, y ponchar es sencillo: simplemente quitamos[1] un punto de la superficie. Para sumar necesitamos dos superficies y la idea no es realmente sumarlas, más bien unirlas. Para esto lo que se hace es primero quitar un pequeño disco *sin borde* (que podríamos pensar como ponchar en un punto gordo) de cada una de las superficies que queremos pegar. Al hacer esto nos quedan dos superficies, cada una con un borde en forma de círculo. Luego las unimos a lo largo de estos círculos.

Si ponchamos una vez la esfera nos queda un disco sin borde. Si volvemos a ponchar nos queda un disco con una ponchadura. En general, si ponchamos n veces la esfera, donde n es un número entero positivo mayor o igual que 1, entonces lo que nos queda es un disco con $n-1$ ponchadudas. Si a un toro le sumamos una esfera, el resultado es un toro de nuevo: podemos pensar a la esfera que sumamos como un chipote que le salió al toro, pero luego *sana sana colita de rana* y sobando el chipote desaparece. En general, si le sumamos a cualquier superficie una esfera, no cambiamos la esfera. En ese sentido, la esfera opera respecto a la suma que definimos como un elemento neutro. Pero hasta ahí con la analogía, no vale la pena divagar en qué sería el inverso de un elemento. Estamos 'sumando' (léase entre comillas) superficies, no números. Por otro lado, si sumamos dos toros, el resultado es una *bitoro*, que es una superficie que se parece a unos lentes sin patitas ni cristal. Si sumamos tres, como en la Figura 1 pues tenemos un tritoro, y así. Al resultado de sumar g toros se le llama una superficie de *género g*. Claro que a una superficie de género g la podemos ponchar n veces, y al resultado se le llama una superficie de género g con n ponchaduras y se le denota por $S_{g,n}$.

A toda superficie S le podemos asociar una estructura algebraica llamada *el grupo fundamental*, que se denota por $\pi_1(S)$. A grandes rasgos, este grupo es un conjunto de lazos orientados que salen de algún punto que nos escojamos y la suma de dos lazos es el lazo que resulta de recorrer uno y después el otro. La discusión formal es un poco más fina pues en realidad de consideran lazos módulo *homotopía*, que no es más que una deformación continua de los lazos, pero no me quiero extender mucho. Si quieren saber más sobre este grupo, les recomiendo el excelente libro de Hatcher intitulado *Algebraic Topology*. Pero no será necesario saber muchos detalles sobre este grupo o los grupos en general para entender lo que sigue. Lo importante a retener es que toda superficie tiene una etiqueta algebraica. Grupos hay muchos, pero los podemos clasificar en una primera aproximación en dos categorías: aquellos donde sus elementos se pueden escribir como palabras usando un alfabeto finito, formalmente decimos que son *finitamente generados*, y los que no. Así, podemos ahora poner a las superficies en dos categorías.

Definición 0.1. *Decimos que una superficie S es de* tipo finito *si su grupo fundamental $\pi_1(S)$ es finitamente generado. Si este grupo* ***no*** *es finitamente generado, diremos que S es de tipo infinito.*

[1] Alguna gente prefiere marcar los puntos en lugar de ponchar. Una manera resolver esta disyuntuva es marcar los puntos con el color *ya no está ahí*.

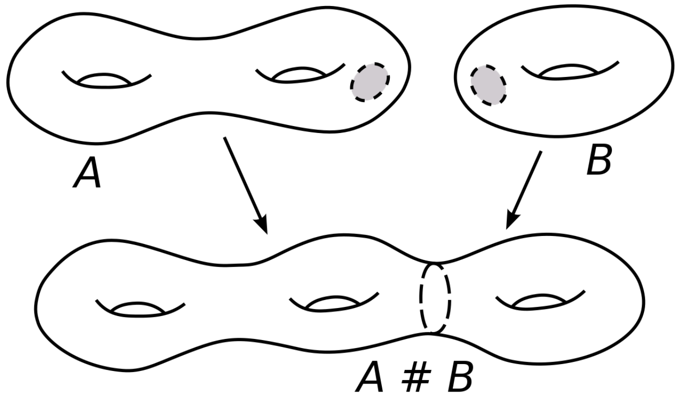

FIGURA 1. La suma de un bitoro con un toro.

El siguiente resultado, que mencionamos sin prueba, nos permite clasificar todas las superficies de tipo finito.

Teorema 0.2. *El conjunto de todas*[2] *las superficies de tipo finito es* $\{S_{g,n}\}_{g,n\geq 0}$.

Ejercicio 0.3. *Argumenta con tus propias palabras porqué si* $(g,n) \neq (g',n,)$ *entonces las superficies* $S_{g,n}$ *y* $S_{g',n'}$ *son diferentes.*

Ahora bien, ¿qué parasaría si ponchamos la esfera un número *infinito* de veces? Para fijar ideas, consideremos el ejemplo donde marcamos un segmento en la esfera, que pensaremos como el segmento $[0,1]$ en la recta real por un momento, y pensemos que los puntos donde ponchamos correponden a la sucesión $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\}$. ¿Es lo que nos queda una superficie? *A priori* uno está tentado a decir que sí, pues al ponchar una superficie lo que obtenemos es una superficie. Pero si ponemos un poco más de atención, veremos que este caso es diferente. En efecto, los puntos de la sucesión $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ convergen al 0, que es un punto en el segmento que marcamos en la esfera. Por esta convergencia, no importa qué tan cerca estemos del 0, siempre veremos ponchaduras. En otras palabras, el objeto que creamos al ponchar en los puntos $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ **no** es una superficie pues cerca del punto 0, no se parece al plano. ¿Qué salió mal en este caso? La respuesta es sencilla: *dejamos que las ponchaduras se acumularan en un punto y no ponchamos en ese punto.* Así, lo único que tenemos que hacer para remediar la situación es, después de ponchar en los puntos de la sucesión $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$, ponchar además en el 0. Así, ya no hay problema en el punto donde se acumulan las ponchaduras pues ese punto simplemente *ya no está ahí.*

La situación descrita en el párrafo anterior se puede resumir de manera abstracta como sigue: consideramos una sucesión infinita $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{S}^2$ que se acumula en un único punto x_∞ y ponchamos a la esfera a lo largo del conjunto $\Sigma_0 := (x_n)_{n\geq 1} \cup x_\infty$. El resultado de este proceso es la superficie de tipo infinito $\mathbb{S}^2 \setminus \Sigma_0$. Empujemos nuestra máquina de ponchar un poco más allá para crear una infinidad de ejemplos. Para esto vamos a considerar, para cada $n \geq 1$ una sucesión de puntos en la esfera $(y_n)_{k\geq 1}$ que se acumule en el punto x_n. Definamos $\Sigma_1 := (x_n)_{n\geq 1} \cup x_\infty \cup ((y_n)_{k\geq 1})_{n\geq 1}$. El conjunto Σ_1 tiene una infinidad de puntos, que se acumulan en los puntos de Σ_0.

Ejercicio 0.4. *Argumenta, usando tus propias palabras, porqué y cómo las superficies* $\mathbb{S}^2 \setminus \Sigma_0$ *y* $\mathbb{S}^2 \setminus \Sigma_1$ *son diferentes.*

Ahora definamos recursivamente, para cada $l \geq 2$, Σ_l como un subconjunto numerable de la esfera, cuyos puntos de acumulación son los puntos de Σ_{l-1}.

Ejercicio 0.5. *¿Son, si* $l \neq' l$, *las superficies* $\mathbb{S}^2 \setminus \Sigma_l$ *y* $\mathbb{S}^2 \setminus \Sigma_{l'}$ *iguales o diferentes? ¿Por qué?*

El proceso de ponchado infinito que acabamos de describir produce superficies con una cantidad *numerable* de ponchaduras. Cabe entonces la pregunta si podemos ponchar una superficie una cantidad no numerable de veces y que el resultado siga siendo una superficie. La respuesta es que si, pero hay que hacerlo con cuidado. Analicemos el siguiente ejemplo[3]. Consideremos el intervalo $I = [0,1]$ y de él quitemos el intervalo *abierto* $(0,1)$, es decir, quitamos el tercio de enmedio. Nos quedan entonces los intervalos cerrados $[0, \frac{1}{3}]$ y $[\frac{2}{3}, 1]$. Ahora, iteremos el proceso de quitar el tercio de enmedio a con cada uno de estos intervalos. El resultado son cuatro segmentos cerrados: $[0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Sorprendentemente, si continuamos este proceso *ad infinitum* el resultado es un subconjunto no vacíode $[0,1]$, no numerable y que no contiene ningún intervalo. A este conjunto se le da el nombre del conjunto de Cantor y lo denotaremos por $\mathcal{C}$. Normalmente se le dota de la topología que hereda del intervalo $[0,1]$, y respecto a esta topología es un conjunto cerrado, compacto y totalmente disconexo. Así, pensando que el intervalo $[0,1]$ forma parte una recta que vive en $\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \infty$, podemos considerar $\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{C}$. ¿Es esto una superficie? La respuesta es que sí, pero para poderlo garantizar necesitamos una propiedad importante del conjunto de Cantor: es un conjunto cerrado y totalmente disconexo. Esto nos garantiza que todo punto en $\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{C}$ tiene una vecindad que es parecida al plano y por tanto se

[2]Aquí estoy engañando un poco al lector. En realidad hay toda una clase de superficies que no estamos considerando: las superficies no orientables. El resultado que se enuncia aquí es válido si pensamos que superficies quiere decir superficie orientable. La orientabilidad es una propiedad intrínseca a la superficie que normalmente se estudia en un curso de topología diferencial.

[3]Si el lector ya sabe qué es el conjunto de Cantor se puede saltar esta parte

trata efectivamente de una superficie, que llamaremos *el árbol de Cantor*, ver Figura 3. El árbol de Cantor es diferente a las superficies que describimos antes pues tiene un número *no numerable* de ponchaduras.

Ahora es momento de hacer una pausa para observar lo siguiente. En el párrafo anterior vimos que podemos ponchar a la esfera en el conjunto de Cantor y obtenemos una superficie y lo único que necesitamos de este conjunto para que las cosas funcionaran fue que $\mathcal{C}$ fuera cerrado y totalmente disconexo. Entonces, si tomamos X cualquier subconjunto cerrado de $\mathcal{C}$ tendremos que $\mathbb{S}^2 \setminus X$ es también una superficie. Es decir, podemos ponchar a $\mathbb{S}^2$ en cualquier subconjunto cerrado de $\mathbb{C}^2$ y el resultado será una superficie. Aquí se abre una verdadera caja de pandora pues subconjuntos cerrados de $\mathbb{C}$ hay muchos (una cantidad no numerable). ¿Cómo podemos distinguir entonces a las superficies creadas de esta manera? Para esto tenemos que decidir primero cómo las vamos a distinguir y eso nos obliga a visitar un concepto propio de la *topología*.

El concepto de homeomorfismo. Como toda superficie es algo que localmente se parece a un plano, podemos hablar de vecindades pequeñas en una superficie. Formalmente, la topología del plano induce una topología en cualquier superficie[4]. Así, una biyección $f : S \to S'$ se dirá que es continua si la imagen inversa de una vecindad pequeña es una vecindad pequeña y diremos que es un *homeomorfismo* si tanto f como f^{-1} son continuas. Las supeficies S y S' en este caso se dice que son *homeomorfas*. La noción de homeomorfismo se generaliza a cualquier espacio topológico, por ejemplo para cualquier subconjunto de $[0, 1]$, como el conjunto de Cantor.

De ahora en adelante, distinguiremos las superficies módulo homeomorfismo. Es razonable conjeturar que si X y X' son dos subconjuntos homeomorfos y cerrados del conjunto de Cantor, entonces $\mathbb{S}^2 \setminus X$ es homeomorfa a $\mathbb{S}^2 \setminus X'$. El converso es una conjetura aventurada, pero como veremos más adelante, ambas son ciertas. Antes de mover la discusión hacia sumas *infinitas* de toros, queda la pregunta en el aire de si hay alguna otra manera de ponchar una superficie. La respuesta es *depende*. Si ya nos permitimos ponchar en conjuntos no numerables, pues podríamos poncha a lo largo de un intervalo, de una estrella, etc. Ahora bien, si ponemos la restricción de que el conjunto sea totalmente disconexo, la respuesta es que no hay otra manera de ponchar pues cualquier subconjunto compacto y totalmente disconexo de la esfera es homeomorfo a un subconjunto de $\mathbb{C}$.

Suma infinita de toros. Como explicamos al principio de este texto, para poderle sumar un toro a una esfera hay que escoger un disco abierto en la esfera y quitarlo para poder pegar a lo largo del círculo que nos queda como borde el toro que tenemos. Así, si queremos sumar una cantidad infinita de toros, pues tendremos que escoger eventualmente una infinidad de discos abiertos. Dado que $\mathbb{S}^2$ es un espacio compacto (o de diámetro finito si prefieren), si denotamos por $(D_n)_{n\geq 1}$ la sucesión (infinita) de discos que queremos quitar para sumar una infinidad de toros entonces necesariamente el tamaño diámetro de estos discos tiene que tender a cero y se deben acumular en por lo menos un punto d_∞ de $\mathbb{S}^2$. Es decir, estamos en una situación muy parecida a cuando queríamos ponchar sucesión infinita de puntos $(x_n)_{n\geq 1}$ que se acumulaba en x_∞. Entonces, podemos sumar la infinidad de toros a la esfera, pegando uno por uno a lo largo de los círculos que nos quedan en $\mathbb{S}^2 \setminus (D_n)_{n\geq 1}$, pero para nos quede una superfie también hay que ponchar en el punto d_∞. En efecto, si no poncháramos $\mathbb{S}^2$ en dicho punto, el resultado de sumar una infinidad de toros sería un objeto que en cualquier vecindad de d_∞ no se parece al plano (pues los toros se acumularían ahí). En resumen: si queremos sumar una infinidad de toros, eventualmente tenemos que ponchar los puntos de acumulación de las sucesiones de discos que removamos para efectuar la suma.

En el párrafo anterior, para sumar una infinidad de todos tomábamos una infinidad de discos y luego ponchábamos en los puntos de acumulación de dichos discos. Ahora, pensemos un poco las cosas en la otra dirección. Podemos primero tomar cualquier punto en la esfera y *luego* hacer converger una sucesión de discos a él para después pegar toros a lo largo de dichos discos. O podríamos tomar dos puntos, o un conjunto de la forma $(\frac{1}{n})_{n\geq 1} \cup 0$, y hacer converger a cada punto escogido una sucesión de discos y luego pegar toros. Un poco más difícil de visualizar, pero es un ejercicio interesante, es considerar una copia del conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ y crear una sucesión de discos que se acumule en $\mathcal{C}$. Una vez logrado esto, de hecho podríamos hacer el mismo truco para cualquier subconjunto cerrado $X \subset \mathcal{C}$.

Como vemos, las posibilidades para crear nuevas superficies son infinitas. Luego, el problema de clasificarlas parece incluso más complicado. En lo que resta de este texto abordaremos dicho problema y el principal resultado que quiero el lector se lleve de este texto, que es el teorema de clasificación de superficies.

Hacia una clasificación de todas[5] las superficies. La primera observación imporante a hacer es que toda superficie sin ponchaduras, como el bitoro, es un espacio topológico compacto, o si lo prefieren, tiene diámetro finito. Ahora bien, a la hora de hacer una ponchadura cambiamos esta propiedad, pues quitar un punto es lo mismo que mandarlo a la fregada, que todos sabemos está infinitamente lejos. Ahora, para formalizar la idea de que una ponchadura está en el infinito introducimos el concepto de fin de una superficie S. Seguiremos las ideas que maneja Richards en [1]. Lo primero que necesitamos es una sucesión de abiertos $(U_i)_{i\geq 1}$, donde (1) cada U_i es un subconjunto de S con frontera compacta, (2) $U_{i+1} \subset U_i$ para todo i y se tiene además que (3) $\cap_{i\geq 1} U_i = \emptyset$. Las propiedades (2) y (3) nos dicen que la sucesión de abiertos que estamos considerando realmente se escapa al infinito. Para fijar ideas, podemos pensar que $S = \mathbb{R}^2$ y U_i es el complemento de una vecindad cerrada centrada

[4]Sin entrar demasiado en tecnicismos, debemos pedir que las llamadas *funciones de transición* de la estructura de la superficie sean continuas con inversa continua. Pero para esto debemos discutir la noción de atlas, lo que implicaría llevar la discusión a un grado de abstracción innecesario para este texto.

[5]De nuevo, estoy considerando sólo las orientables

en el origen de diámetro i. En la Figura 4 se ilustran algunas sucesiones de abiertos como las que acabamos de introducir. De esta figura es claro que hay diferentes sucesiones de abiertos que 'capturan' el mismo fin. Entonces, para evitar redundancias introducimos una relación equivalencia: diremos que $(U_i)_{i\geq 1}$ es equivalente a $(V_j)_{j\geq 1}$ si para cada i existe una j tal que U_i está contenido en V_j y *viceversa*. Al espacio cociente que resulta de esta relación de equivalencia le llamamos *el espacio de fines* de S y se lo denotaremos como $E(S)$. Sus elementos son clases de equivalencia de sucesiones de abiertos que denotaremos por $[U_i]_{i\geq 1}$ y llamaremos fines de S.

Por el momento sólo hemos definido un conjunto que podemos convertir en un espacio topológico de la siguiente manera. Para cada $U \subset S$ subconjunto abierto de frontera compacta definamos:

$$U^* := \{[U_i]_{i\geq 1} : \text{existe } U_{i_0} \subset U\}.$$

Es decir, U^* es el conjunto de fines $[U_i]_{i\geq 1}$ de S para los cuales existe un representante U_{i_0} que está queda conenido en U. El siguiente par de ejercicios están destinados a formalizar la idea de que *una ponchadura es lo mismo que un fin.*

Ejercicio 0.6. *Demuestra que $E(S_{g,n})$ para $g, n \geq 0$ es un espacio topológico discreto con n elementos.*

Ejercicio 0.7. *Calcula $E(S)$, donde $S = \mathbb{S}^2 \setminus \Sigma_0$ y compara la topología de $E(S)$ con la topología de Σ_0 (como subconjunto de la esfera). ¿Son homeomorfos estos espacios? (Como referencia ver el ejercicio 0.4).*

En general, como lo explica Richards en [1], $E(S)$ es un espacio topológico compacto, separable[6] y totalmente disconexo.

Si una ponchadura es lo mismo que un fin, ¿a qué corresponden las ponchaduras que hicimos cuando sumamos una infinidad de toros?. Para responder a esto basta darse cuenta de que hay dos tipo de fines: aquellos donde se acumulan los toros, y aquellos donde no. Un poco más formalmente, diremos que un fin $[U_i]_{i\geq 1}$ es *plano* si existe una $j \geq 1$ tal que U_j no tiene toros (o formalmente, no tiene género). Un fin que no es plano se llama un fin *acumulado por género* y denotamos por $E^g(S) \subset E(S)$ al espacio de todos los fines acumulados por género.

Estamos ya en forma para poder enunciar el resultado principal de este texto:

Teorema 0.8. *Dos superficies S y S' (orientables) son homeomorfas si y sólo si tienen el mismo género (número de toros) y existe un homeomorfismo $f : E(S) \to E(S')$ tal que $f(E^g(S)) = f(E^g(S'))$.*

Por razones de espacio, la prueba de este teorema no se incluye en este texto pero puede consultarse en el trabajo de Richards [1]. Lo importante aquí es comparar este enunciado con el Teorema 0.2. Lo primero que notamos es que lo generaliza dado que podemos pensar a las ponchaduras como fines planos. Por otro lado, el Teorema 0.8 nos dice que para poder distinguir entre superficies de tipo infinito necesitamos una etiqueta un poco más sofisticada que sólo un par de números. Necesitamos un par de *espacios topológicos*, que son los que forman la pareja anidada $E^g(S) \subset E(S)$. Cabe entonces preguntarse: ¿qué tipo de espacio topológico es $E(S)$?. Como mencionamos anteriormente, $E(S)$ es un espacio compacto, separable y totalmente disconexo. Es un resultado clásico de la topología, que cualquier espacio topológico con estas características es homeomorfo a un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor. Esto nos permite dar un teorema de realización para los invariantes que acabamos de introducir. Más precisamente.

Teorema 0.9. *Sea g un número entero no negativo y $X' \subset X \subset \mathcal{C}$ una pareja de subconjuntos cerrados del conjunto de Cantor. Entonces existe S una superficie de género g y un homeomorfismo $f : X \to E(S)$ tal que $f(X') = E^g(S)$.*

Podemos entonces resumir el contenido de los Teoremas 0.8 y 0.9 como sigue. Las superficies orientables están clasificadas por una etiqueta que contiene tres piezas de información: el género de la superficie y dos subconjuntos cerrados del conjunto de Cantor, anidados, que describen las maneras como tiene S de ir al infinito. Recíprocamente, cualquier etiqueta formada por tres piezas de información como las que acabamos de describir corresponde a una superficie orientable. Además, las superficies de tipo finito se caracterizan por tener género finito y un espacio $E(S)$ finito donde cada fin es plano. Así, podemos con certeza decir que hay más superficies de tipo infinito que superficies de tipo finito.

Este texto termina con un el ejercicio más importante de todos. En una primera lectura parece el típico ejercicio que el profesor deja para no hacer su trabajo, pero en este caso ésta no es la idea. Después del ejercicio dejo una pista.

Ejercicio 0.10. *Da una prueba del Teorema 0.9.*

Pista: en las primeras tres páginas del texto están las ideas principales para dar la prueba que se te pide. En otras palabras, el ejercicio en realidad no es dar la prueba, sino *buscarla* en este texto. Los puntos están ahí, sólo hay que ver cómo se unen.

Palabras finales. O quizás estas debieron ser las primeras palabras. El punto que quiero hacer es que las superficies de tipo infinito aparecen en muchos contextos. Es probable que un alumno de licenciatura no entienda todas los términos que siguen, así que tómenlos como una provocación para investigar sobre el tema. Es a propósito que no dejo bibliografía, pues le pido a un lector interesado que simplemente me escriba si quiere saber más. El contexto donde aparecen las superficies de tipo infinito que prefieron es el de los billares triangulares. Se puede probar que, con probabilidad 1, un billar en un triángulo es lo mismo que un flujo lineal sobre una superficie de género infinito cuyo espacio de fines es sólo un punto. Otro contexto dinámico donde aparecen las superficies de tipo infinito es en la panadería. No es broma, pues hay una aplicación del cuadrado en sí mismo inspirada en el proceso de amasar que cuando trata de definirse como una función continua nos lleva naturalmente a considerar una superficie de género infinito. Por otro lado, hay un sistema dinámico clásico llamado el viento en los árboles, en inglés *wind-tree model*, que

[6] Es decir que contiene un subconjunto denso numerable

no es más que un billar en un polígono infinito (con muchos obstáculos) y cuyo estudio, adivinen, también nos lleva a considerar una superficie de género infinito. Ahora bien, lo interesante de esto es que la superficie que aparece con panadería, billares o en el viento en los árboles es, topológicamente, la misma: una S para la cual $E(S) = E^g(S)$ es un punto. Esta recibe un nombre particular: *el monstruo del Lago Ness* y lo que varía entre los contextos que menciono es una estructura extra que tiene dicho monstruo, una estructura geométrica. Así que estas palabras finales son sólo un anzuelo para comenzar otra historia: la de las superficies planas de tipo infinito. Así, quien haya llegado hasta aquí y quiera escuchar más al respecto, me escribe a la dirección de correo electrónico que aparece bajo mi nombre en el título.

Referencias

[1] Ian Richards. On the classification of noncompact surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 106:259–269, 1963.