Los Números Reales de Eudoxo
Degustaciones Matemáticas

Carlos Adrián Pérez Estrada
PCCM
cperez@matmor.unam.mx

Resumen

En el presente texto se exhibe y explica una construcción de los números reales ideada por Stephen Schanuel. Al igual que la construcción usual de los números reales mediante cortaduras de Dedekind, la idea de Schanuel está inspirada en la teoría de proporción de Eudoxo. La diferencia entre estas dos es que mientras la primera utiliza a los números racionales como materia prima, la segunda está enteramente basada en la teoría de los números enteros.

1. Introducción

Uno de los objetos matemáticos más interesantes y útiles, tanto en las matemáticas como en sus aplicaciones, es el sistema de los números reales. Desde su interpretación geométrica como una recta hasta su consideración formal como un sistema de magnitudes [3], el campo $\mathbb{R}$ de los números reales cuenta con una multitud de construcciones que destacan propiedades fundamentales de éste; las más usuales son las realizadas con las cortaduras de Dedekind y las sucesiones de Cauchy, respectivamente. Con las primeras se conciben a los reales como particiones no triviales del conjunto de los racionales "en dos pedazos", y con las segundas se piensa a los reales como los puntos que "rellenan" la recta disconexa dada por la interpretación geométrica de los racionales. Otra realización de los reales se da mediante su representación decimal expresada con sucesiones de números enteros que no son eventualmente nueve [4] o que no son eventualmente cero [3].

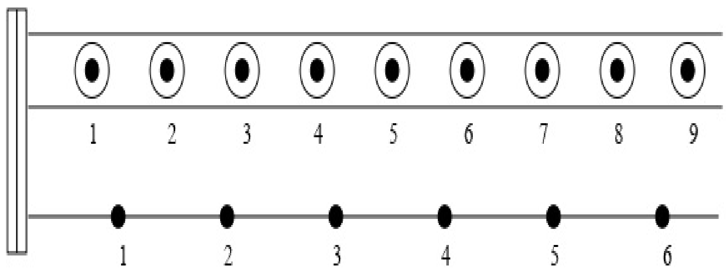

Figura 1: La valla y la Columnata de De Morgan ([2, Figura 1]).

La construcción que se explicará en el presente texto también está basada en sucesiones de números enteros (conocidas como funciones *casiaditivas*, ver la Definición 3.1) que responden a la intuición que dio De Morgan a la noción de proporcionalidad de Eudoxo. De acuerdo a [2], la interpretación dada por De Morgan es la siguiente: Constrúyase una valla con barandillas equiespaciadas por una distancia (positiva) R y enfrente de ésta hagase una columnata con columnas equiespaciadas por una distancia C, tal y como se muestra en la Figura 1. Si las construcciones se siguen indefinidamente, una persona puede comparar la proporción de R con respecto a C, representada en notación moderna por el número racional R/C, simplemente contando las barandillas y las columnas. Por ejemplo, en la Figura 1 se observa que la sexta barandilla se sitúa entre la octava y novena columna, de modo que $8C < 6R < 9C$, por lo cual $4/3 < R/C < 3/2$. Entre más exactitud se requiera para R/C, más barandillas tienen que ser consideradas.

La Figura 1 sugiere una forma de representar al número real positivo R mediante una sucesión de números naturales $\{R_m\}_{m\in\mathbb{N}}$: Considérese la distancia entre las columnas C como 1 y para cada $m \in \mathbb{N}$ defínase el número $R_m \in \mathbb{N}$ como la cantidad de columnas que están a la izquierda de la m-ésima barandilla o que están alineadas con ésta en la figura. Por ejemplo, para el R escogido en la Figura 1 se tiene que $R = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots\}$. Debido al conteo burdo que se hace para representar a R, se tiene que permitir un error en el cálculo de los R_m. Por ejemplo, si para cada $m \in \mathbb{N}$ no se cuenta la primera columna, la sucesión $\{R'_m := R_m - 1\}_{m\in\mathbb{N}}$ tiene que seguir representando a R ya que $\{(R_m - R'_m)/m\} \to 0$.

Cuando $R \in \mathbb{N}$, se sigue que la sucesión $\{R_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es *aditiva* en el sentido de que $R_{m+n} = R_m + R_n$ para cada $n, m \in \mathbb{N}$. En cambio, cuando R no es entero la ecuación anterior no siempre es cierta, pero se sigue cumpliendo que la sucesión $\{R_{m+n} - R_m - R_n\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ es finita. Esto propone que todo número real sea representado por sucesiones enteras "aproximadamente aditivas", identificando dos sucesiones $\{a_m\}$ y $\{b_m\}$ cuando $\{(a_m - b_m)/m\} \to 0$.

Extendiendo de forma natural las definiciones y las consideraciones anteriores, ya se puede definir el conjunto de los *números reales de Eudoxo*, el cual se denotará como $\mathbb{E}$, como el *conjunto cociente* de las sucesiones *casiaditivas* mediante la *relación de equivalencia* que identifica sucesiones con *diferencia finita*. Seguido de eso, se definen una suma, un producto y una *relación de orden* en $\mathbb{E}$ que hacen de éste un *campo ordenado completo*. Por ende, el único teorema del capítulo 29 de [4] indica que $\mathbb{E}$ es isomorfo a cualquier modelo del campo ordenado completo de los números reales (mediante un único isomorfismo). Por consiguiente, puede considerarse a $\mathbb{E}$ como una definición honesta de $\mathbb{R}$.

Antes de realizar este programa en la Sección 3, en la Sección 2 se hará un repaso de las definiciones necesarias para entender lo comentado en este párrafo y el resto de la construcción, la cual está basada en los trabajos de R.D Arthan [2] y Norbert A'Campo [1].

Con el objetivo de no extender demasiado el presente texto y no complicar su entendimiento mediante pruebas técnicas, se ha decidido sólo expresar las definiciones y propiedades principales de la estructura de campo ordenado de la que goza $\mathbb{E}$. Los detalles de la construcción se pueden consultar en los trabajos previamente citados de Arthan y A'campo.

2. Preliminares

Tal y como se ha advertido anteriormente, en las distintas etapas de la construcción de los números de Eudoxo es necesario considerar *relaciones en conjuntos*.

Definición 2.1. Una **relación** en un conjunto X es un subconjunto $\mathcal{R} \subset X \times X$. Si $x, x' \in X$ son tales que $(x, x') \in \mathcal{R}$, entonces se dice que x está relacionado a x' (o $\mathcal{R}$-relacionado) y se escribe $x\mathcal{R}x'$.

Los casos particulares del concepto de relación interesantes para el presente trabajo son los de relación de equivalencia y relación de orden. Como la abstracción de estas nociones es similar, en este escrito se condensan en una sola definición.

Definición 2.2. Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto X es:

1. **Reflexiva** si para todo $x \in X$, $x\mathcal{R}x$.
2. **Simétrica** si para todo $x, y \in X$, $x\mathcal{R}y$ implica que $y\mathcal{R}x$.
3. **Antisimétrica** si para todo $x, y \in X$, $x\mathcal{R}y$ y $y\mathcal{R}x$ implica que $x = y$.
4. **Transitiva** si para todo $x, y, z \in X$, $x\mathcal{R}y$ y $y\mathcal{R}z$ implica que $x\mathcal{R}z$.

Si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica y transitiva se dice que $\mathcal{R}$ es una **relación de equivalencia**. En cambio, si $\mathcal{R}$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva se dice que $\mathcal{R}$ es una **relación de orden**.

Tal y como los nombres lo sugieren, una relación de equivalencia relaciona elementos con una característica en común y una relación de orden compara elementos dentro de un conjunto.

Definición 2.3. Sea X un conjunto y $\sim$ una relación de equivalencia en éste.

1. La **clase de equivalencia** de $a \in X$ se define como el conjunto $[a] := \{b \in X \mid a \sim b\}$.

2. El **conjunto cociente** de X respecto a la relación $\sim$ se define como $X/\sim := \{[a] \mid a \in X\}$.

Definición 2.4. Un **conjunto parcialmente ordenado** es un par ordenado $(X, \leq)$ para el cual X es un conjunto y $\leq$ es una relación de orden en éste. Aunado a eso, se dice que $(X, \leq)$ es **totalmente ordenado** y que $\leq$ es un **orden total** si para cualesquiera $x, y \in X$ se sigue que $x \leq y$ o que $y \leq x$.

Definición 2.5. Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado.

1. Un subconjunto $A \subset X$ está **acotado superiormente** (**acotado inferiormente**) si existe un $x \in X$ tal que $a \leq x$ $(x \leq a)$ para todo $a \in A$.

2. Un elemento $x \in X$ es cota superior (cota inferior) de $A \subset X$ si para cada $a \in A$ se sigue que $a \leq x$ $(x \leq a)$. En tal caso, se dice que x es **cota superior mínima** (**cota inferior máxima**) de A si para cada cota superior (inferior) $y \in X$ de A se sigue que $x \leq y$ $(y \leq x)$.

3. Se dice que $(X, \leq)$ es **completo** si todo subconjunto no vacío $A \subset X$ tiene una cota superior mínima y una cota inferior máxima.

Definición 2.6. Un **campo ordenado** es una 4-tupla $(\mathbb{K}, +, *, \leq)$ tal que:

1. $(\mathbb{K}, +, *)$ es un campo,

2. $(\mathbb{K}, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado,

3. el conjunto $\{x \in \mathbb{K} \mid x \geq 0\}$ es cerrado bajo la suma $+$ y el producto $*$.

Más aún, si $(\mathbb{K}, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado completo, se dice que $(\mathbb{K}, +, *, \leq)$ es un **campo ordenado completo**.

Definición 2.7. Una función $f\colon \mathbb{K} \to \mathbb{F}$ entre dos campos $(\mathbb{K}, +, *)$ y $(\mathbb{F}, \oplus, \odot)$ es un **isomorfismo de campos** si se satisfacen las siguientes 3 condiciones:

1. f es biyectiva,

2. $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$ para cada $x, y \in \mathbb{K}$,

3. $f(x * y) = f(x \odot y)$ para cada $x, y \in \mathbb{K}$.

Adicionalmente, si $(\mathbb{K}, +, *, \leq)$ y $(\mathbb{F}, \oplus, \odot, \preceq)$ son campos ordenados, se dice que f es un **isomorfismo de campos ordenados** si $x \leq y$ implica que $f(x) \preceq f(y)$.

Tal y como se ha comentado, en [4] se demuestra que para cualesquiera dos campos ordenados completos $(\mathbb{K}, +, *, \leq)$ y $(\mathbb{F}, \oplus, \odot, \preceq)$ existe un único isomorfismo $f\colon \mathbb{K} \to \mathbb{F}$ entre ellos (resultado atribuido a Otto Hölder en [2]). En este sentido se dice que, salvo isomorfismo, sólo hay un campo ordenado completo: el sistema de los números reales $\mathbb{R}$. Con los preliminares expuestos ya se puede dar una representación del mismo en términos de los *números de Eudoxo*.

3. Construcción de los números reales de Eudoxo

Los *números reales de Eudoxo* bosquejados en la introducción fueron los reales positivos, los cuales se representan por sucesiones de enteros no negativos $\{R_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ con la propiedad de que la sucesión $\{R_{m+n} - R_m - R_n\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ es finita. Una generalización natural de lo anterior, que permite hablar de números reales nulos o negativos, se da mediante la consideración de sucesiones de enteros $\{R_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ sujetas a la misma condición de *casiaditivad*. En la siguiente definición se formalizan estas nociones.

Definición 3.1. Una función **casiaditiva** es una función $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ para la cual la función

$$\begin{aligned} d_f\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (p, q) &\longmapsto f(p+q) - f(p) - f(q) \end{aligned}$$

tiene rango finito.

Nótese que toda función $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ de rango finito es trivialmente casiaditiva. De acuerdo a la discusión de la introducción, todas éstas deberían representar al mismo número real, el cual resultará ser 0. Así mismo, toda función aditiva f (i.e. tal que $f(n+m) = f(n) + f(m)$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$) también es casiaditiva de manera trivial. Como dichas funciones corresponden a la multiplicación por $f(1)$, se seguirá que el número real que representan es precisamente este último.

Definición 3.2. Dos funciones casiaditivas $f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ son equivalentes, lo cual se denota como $f \sim g$, si $f - g$ es una función de rango finito.

Problema 3.3. Demuestre que la relación $\sim$ entre funciones casiaditivas es de equivalencia en el conjunto conformado por éstas.

Problema 3.4. Sean $f_1, f_2\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dos funciones casiaditivas. Demuestre lo siguiente:

1. La suma $f_1 + f_2$, la composición $f_1 \circ f_2$ y la inversión $-f_1$ son funciones casiaditivas.
2. Si $g_1, g_2\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ son dos funciones casiaditivas para las cuales $f_1 \sim g_1$ y $f_2 \sim g_2$, entonces $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$, $f_1 \circ f_2 \sim g_1 \circ g_2$ y $-f_1 \sim -g_1$.

Definición 3.5. Un **número real de Eudoxo** es una clase de equivalencia de funciones casiaditivas $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ respecto a la relación $\sim$ dada en la Definición 3.2. El conjunto de los números reales de Eudoxo se denota como $\mathbb{E}$.

Gracias a los Problemas 3.3 y 3.4, el conjunto de números $\mathbb{E}$ adquiere una estructura de campo mediante una operación binaria de suma $+$ y una operación binaria de producto $*$ que se definen como

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \times \mathbb{E} &\longrightarrow \mathbb{E} \\ +\colon ([f],[g]) &\longmapsto [f+g] \\ *\colon ([f],[g]) &\longmapsto [f \circ g]. \end{aligned}$$

El neutro aditivo es la clase de la función 0 (la cual coincide con la clase de todas las funciones acotadas), el inverso aditivo de un real representado por f es el real representado por $-f$ y el neutro multiplicativo es la clase de la función identidad $\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$.

Para describir el inverso multiplicativo de un real $\alpha \neq 0$, es necesario hablar primeramente de la relación de orden que hace de $(\mathbb{E}, +, *, \leq)$ un campo ordenado completo. Un paso preliminar es la distinción entre funciones casiaditivas *positivas* y funciones casiaditivas *negativas*:

Definición 3.6. Una función casiaditiva f es **positiva** si para cada $C \in \mathbb{N}_0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $f(n) > C$. Consecuentemente, una función casiaditiva es **negativa** si su inverso aditivo es una función casiaditiva positiva.

Problema 3.7. Sean f y g funciones casiaditivas. Pruebe lo siguiente:

1. si $f \sim g$, entonces f es una función casiaditiva positiva si y sólo si g lo es.
2. Si f y g son funciones casiaditivas positivas, entonces $f + g$ y $f \circ g$ son funciones casiaditivas positivas.

Proposición 3.8. *Si $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es una función casiaditiva, exactamente una de las siguientes condiciones se cumple:*

1. *f tiene rango acotado,*
2. *f es una función casiaditiva positiva,*
3. *$-f$ es una función casiaditiva negativa.*

La Proposición 3.8 indica que cualquier $\alpha \in \mathbb{E}$ está representado por una función casiaditiva acotada, positiva o negativa, y el primer punto de la Proposición 3.7 muestra que cualquier función $f \in \alpha$ es acotada, positiva o negativa, respectivamente, sin poder ser de los otros dos tipos. Así, se puede definir un orden total en $\mathbb{E}$ de manera natural.

Definición 3.9. Un número real α es **menor o igual** a un número real β ($\alpha \leq \beta$) si $\beta - \alpha$ se representa por alguna función casiaditiva acotada o por alguna función casiaditiva positiva.

Ahora ya se puede terminar la descripción de la estructura algebraica del campo $(\mathbb{E}, +, *)$. Si α está representado por una función positiva f, entonces su inverso multiplicativo α^{-1} está representado por la función $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$g(n) = \begin{cases} \text{mín}\{m \in \mathbb{N} \mid f(m) \geq n\} & \text{si } n \geq 0, \\ -g(-n) & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

En cambio, si α está representado por una función negativa f, entonces el inverso multiplicativo de α está dado por $-(-\alpha)^{-1}$.

Tal y como se ha mencionado anteriormente, los números enteros se pueden identificar con los números reales de Eudoxo que están representados por funciones aditivas $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, las cuales corresponden a las funciones lineales (aquellas que actúan por multiplicación por algún $n \in \mathbb{Z}$). En términos de clases de equivalencia, la correspondencia anterior está dada mediante el encaje definido por

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{E} \\ n &\longmapsto [m \mapsto nm]. \end{aligned}$$

Nótese que la función anterior es inyectiva y preserva la suma, el producto y el orden. Así, sin perder generalidad, se puede suponer que $\mathbb{Z}$ corresponde con la imagen de esta función, de modo que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{E}$.

Con la identificación anterior se puede probar la completitud del orden total $\leq$. Un paso previo es la verificación de la propiedad arquimediana para $\mathbb{E}$ (ver [4, Teorema 2, Capitulo 8] o [2, Lema 14]. En particular, lo que se necesita es el número que aparece en el siguiente lema ([2, Lema 14]):

Lema 3.10. *Para cada $x \in \mathbb{E}$ existe un único $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ tal que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.*

Supóngase que $A \subset \mathbb{E}$ es un subconjunto no vacío acotado superiormente. Si A tiene elemento máximo x (i.e. tal que $x \in A$ y $a \leq x$ para cada $a \in A$), entonces x es la cota superior mínima buscada. En cambio, si A no tiene elemento máximo, la cota superior mínima de A está representada por la función $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} \text{máx}\{\lfloor nx \rfloor \mid x \in S\} & \text{si } n \geq 0, \\ -f(-n) & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Por otro lado, si $B \subset \mathbb{E}$ es un subconjunto no vacío acotado inferiormente, su cota inferior máxima es el inverso aditivo de la cota superior mínima del conjunto $-B := \{-x \mid x \in B\}$ (la cual existe por ser $-B$ no vacío y acotado superiormente).

Con el resultado anterior y el punto 2 del Problema 3.7 ya se obtiene el resultado principal del presente texto:

Teorema 3.11. $(\mathbb{E}, +, *, \leq)$ *es un campo ordenado completo.*

Con esto se tiene una representación de los números reales mediante los números reales de Eudoxo. R.D. Arthan atribuye esta realización de $\mathbb{R}$ a Stephen Schanuel en [2], y menciona que este último nombró su construcción en honor a Eudoxo ya que refleja la relación entre lo discreto y lo continuo que está presente en la teoría de proporción antigua.

4. Ejercicios

Ejercicio 4.1. Sean $\mathbb{R}$ el campo de los números reales y $\mathbb{E}$ el campo de los números reales de Eudoxo. Demuestre que la asignación

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [f] &\longmapsto \lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{n} \end{aligned}$$

es una función bien definida que resulta ser un isomorfismo de campos con inversa

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{E} \\ x &\longmapsto [n \mapsto \lfloor xn \rfloor], \end{aligned}$$

en donde para cada $y \in \mathbb{R}$, $\lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$ es el único entero para el cual $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$. Adicionalmente, considerando la estructura usual de orden en $\mathbb{R}$ y la relación de orden en $\mathbb{E}$ descrita en la definición 3.9, demuestre que f es un isomorfismo de campos ordenados (definición 2.7).

Pista: Verifique que para cualquier función casiaditiva $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la sucesión $\{f(n)/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy; es decir, que para cada $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \frac{f(n)}{n} - \frac{f(m)}{m} \right| < \epsilon$$

siempre que $n, m \geq N$. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass (ver [4, Página 623]), toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ es convergente. Luego muestre que dos funciones casiaditivas g y h son equivalentes si y sólo si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n) - h(n)}{n} = 0.$$

Stephen Schanuel consideró que la gráfica de la función $n \mapsto \lfloor xn \rfloor$ es un subconjunto de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que puede ser considerado como una representación discreta del número real x. En cambio, el límite $\lim_{n\to+\infty} f(n)/n$ funge como una versión continua de la sucesión discreta $\{f(n)/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ asociada a la función casiaditiva $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Es en este sentido que Schanuel afirma que los números reales de Eudoxo reflejan la relación entre lo discreto y lo continuo que está presente en la teoría de la proporción antigua.

Ejercicio 4.2. Sean $p, q \in \mathbb{Z}$ con $q > 0$. Demuestre que la función $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ determinada por

$$f(n) = \begin{cases} \min\{k \in \mathbb{N} \mid qk \geq pn\} & \text{si } n > 0, \\ -f(-n) & \text{si } n \leq 0, \end{cases}$$

es una función casiaditiva que representa al número racional p/q.

Ejercicio 4.3. Pruebe que un número real $\alpha \in \mathbb{E}$ es racional si y sólo si existen un $f \in \alpha$ y un $q \in \mathbb{N}$ para los cuales la función

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ n &\longmapsto f(qn) \end{aligned}$$

es lineal (i.e. está dada por la multiplicación por algún $m \in \mathbb{Z}$). Verifique que si $f \in \alpha$ cumple lo anterior, entonces cualquier $g \in \alpha$ también lo cumple.

Ejercicio 4.4. Pruebe que la función $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} \min\{k \in \mathbb{N} \mid 2n^2 \leq k^2\} & \text{si } n > 0, \\ -f(-n) & \text{si } n \leq 0, \end{cases}$$

es una función casiaditiva que representa al número irracional $\sqrt{2}$.

Referencias

[1] Norbert A'Campo. A natural construction for the real numbers. *Elem. Math.*, 76(3):89–105, 2021.

[2] R.D. Arthan. The Eudoxus Real Numbers. Preprint at arXiv: 0405454 [math.HO], 2004.

[3] F. A. Behrend. A Contribution to the Theory of Magnitudes and the Foundations of Analysis. *Math. Z.*, 63:345–362, 1956.

[4] Michael Spivak. *Cálculo Infinitesimal.* Reverté, 1988.