Emmy Noether y un concepto fundamental en matemáticas del siglo XX. Degustaciones Matemáticas

Noé Bárcenas Torres
Centro de Ciencias Matemáticas UNAM Campus Morelia
barcenas@matmor.unam.mx

En el texto que presentamos con ocasión de las Degustaciones Matemáticas trataremos un tema actual - la contribución y visibilidad de mujeres en la ciencia- en un ejemplo de una idea fundamental para la formalización de varias áreas de las matemáticas básicas en el siglo XX. Emmy Noether (1882-1935) es conocida por sus diversas contribuciones a las ciencias físicas y matemáticas. Conceptos como el de anillo y módulo noetheriano, o la vasta generalización del teorema fundamental de la aritmética presentes en el Teorema de Lasker-Noether dan fé, a través de sus designaciones que incluyen su nombre, de las contribuciones importantes al álgebra conmutativa de esta pionera de las matemáticas del siglo XX. Puntos de vista en la física matemática, como el hoy llamado teorema de Noether, incluyen por primera vez la relación entre leyes de conservación y simetrías.

A continuación explicaremos un concepto matemático fundamental que -en la actualidad- no es suficientemente atribuído a Emmy Noether. Nuestra presentación se basará en álgebra lineal y será seguida de un comentario acerca de cómo estas ideas se encuentran representadas, después de un período de evolución -y no pocas veces de reinvención- en el Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas de la UMSNH y la UNAM en Morelia, y literaura o recursos digitales dónde obtener información.

1. Un concepto algebraico fundamental.

Recuerde la lectora del álgebra lineal el concepto de transformación lineal entre dos espacios vectoriales sobre el campo de los números reales $f : V \to W$. Para una función lineal, se define un subespacio vectorial de V, llamado el *núcleo* y denotado por

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}.$$

La *imagen* de f es, en este contexto, también un subespacio vectorial de W.

Aún más, se tiene el teorema que relaciona las dimensiones de estos subespacios con la dimensión del espacio V, que la lectora pude consultar como el Teorema 2.3 en la página 59 de [Friedberg et al.(1997)Friedberg, Insel, and Spence]:.

Teorema 1.1. *Sean V y W espacios vectoriales de simensión finita , $f : V \to W$ una transformación lineal. Entonces, se tiene que*

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \mathrm{im} f. \tag{1}$$

Una sucesión de dos funciones lineales $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} X$ se dice *exacta en* W, si el núcleo de g coincide con la imagen de f, en símbolos

$$\mathrm{im} f = \ker g.$$

Note la lectora que la inclusión $\mathrm{im} f \subset \ker g$ implica que la composición $g \circ f$ es cero, pero la exactitud es más fuerte que esta propiedad, al incluir la otra contención, $\ker g \subset \mathrm{im} f$.

Algunas propiedades conocidas e importantes del álgebra lineal se pueden expresar en estos términos.

Una sucesión exacta en V del estilo

$$0 \to V \xrightarrow{f} W$$

sólo significa que la transformación lineal f es inyectiva. Una sucesión exacta en V de la forma $V \xrightarrow{f} W \to 0$ significa que la función f es suprayectiva. Finalmente, un isomorfismo se puede escribir de la forma

$$0 \to V \xrightarrow{f} W \to 0,$$

o alternativamente en la ecuación -el signo y el orden serán claros abajo-

$$-\dim V + \dim W = 0.$$

Consideremos una sucesión de funciones lineales de longitud $n + 1$

$$0 \to V_0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \to \dots V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \dots V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \to 0,$$

asumamos que esta sucesión es exacta en cada uno de los espacios vectoriales V_i, es decir,

$$\ker f_{i+1} = \mathrm{im} f_i.$$

De la fórmula 1, tenemos que para k par, de la forma $k = 2l$,

$$\dim V_{2l} = \dim \ker f_{2l} + \dim \mathrm{im} f_{2l},$$

mientras que para $k = 2l + 1$ vale la expresión

$$\dim V_{2l+1} = \dim \ker f_{2l+1} + \dim \mathrm{im} f_{2l+1}.$$

A continuación observaremos la expresión dada por las sumas de las dimensiones de los espacios vectoriales V_k, donde añadimos un signo negativo a los casos donde k es impar.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim V_k.$$

Por la asociatividad de la suma, podemos escribir esa cantidad de la forma

$$\sum_{0\leq 2l\leq n} \dim V_{2l} - \Big(\sum_{0\leq 2l+1\leq n} \dim V_{2l+1} \Big),$$

donde hemos agrupado los sumandos pares e impares con el signo correspondiente. Si a continuación sustituímos las expresiones para las dimensiones de los espacios V_k en los casos par e impar, obtenemos la siguiente diferencia :

$$\sum_{0\leq 2l\leq n} (\dim \ker f_{2l} + \dim \mathrm{im} f_{2l}) - \sum_{0\leq 2l+1\leq n} (\dim \ker f_{2l+1} + \dim \mathrm{im} f_{2l+1}).$$

Directamente de la definición de exactitud en el lugar $2l$ obtenemos $\dim \mathrm{im}\, f_{2l} = \dim \ker f_{2l+1}$, mientras que la exactitud en el lugar $2l - 1$ significa que $\dim \mathrm{im}\, f_{2l-1} = \dim \ker f_{2l}$, por lo que la diferencia mencionada es idénticamente cero.

Resumiendo, para que una sucesión de funciones lineales de la forma

$$0 \to V_0 \overset{f_0}{\to} V_1 \overset{f_1}{\to} V_2 \to \ldots V_i \overset{f_i}{\to} V_{i+1} \ldots V_{n-1} \overset{f_n}{\to} V_n \to 0$$

sea exacta, es necesario que la suma con signo

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim V_k$$

-que involucra a todos los espacios vectoriales en la sucesión de aplicaciones lineales- sea cero.

Sin embargo, necesitamos un punto de vista más enfocado a la situación en cada espacio vectorial V_k para analizar el problema de la exactitud en el lugar k de la sucesión de funciones lineales.

Para ello, suponga la lectora que la composición de cada par de aplicaciones en la sucesión de espacios vectoriales de la forma $f_{i+1} \circ f_i$ es cero, es decir

$$\mathrm{im}\, f_i \subset \ker f_{i+1}.$$

Condensaremos esta condición en la siguiente

Definición 1.2. Un *complejo de cadenas* de espacios vectoriales es una sucesión de espacios vectoriales V_i, junto con funciones lineales $f_i : V_i \to V_{i+1}$ que satisfacen $f_{i+1} \circ f_i = 0$.

También introduciremos una relación de equivalencia en el subespacio

$$\ker f_i,$$

a saber: dos elementos x y y están relacionados si la diferencia $x - y$ es la imagen de algún elemento $z \in V_{i+1}$ bajo la aplicación f_{i+1}. Esta relación cumple las tres condiciones para una relación de equivalencia: transitividad, reflexividad y simetría por el hecho de que la imagen de una función lineal es un subespacio.

Aún más, la lectora puede verificar que la adición definida en representantes y la multiplicación por escalares le dan al conjunto de clases de equivalencia la estructura de un espacio vectorial, siendo un caso particular de la construcción de espacio cociente. Para este espacio cociente, denotado temporalmente por $\ker f_i / \mathrm{im}\, f_{i+1}$ tenemos una sucesión exacta donde la primera aplicación es la inclusión como subespacio y la segunda aplicación es el paso a clases de equivalencia de la forma:

$$0 \to \mathrm{im}\, f_{i+1} \to \ker f_i \to \ker f_i / \mathrm{im}\, f_{i+1} \to 0.$$

Estamos ahora en posición de definir el concepto fundamental en las matemáticas del siglo XX que es el objeto de estudio de este artículo.

Definición 1.3. Sean $(V_i) \overset{f_i}{\to} V_{i+1}$ las aplicaciones que forman parte de un complejo de cadenas de espacios vectoriales. La homología del complejo de cadenas en grado i es el subespacio cociente

$$H_i(V, f) = \ker f_i / \operatorname{im} f_{i+1}.$$

La dimensión de este espacio vectorial es

$$\dim \ker f_i - \dim \operatorname{im} f_{i+1},$$

y el hecho de que se anule es una condición necesaria y suficiente para que un complejo de cadenas sea exacto en V_i.

Esta presentación de la homología se puede atribuir a Emmy Noether a través de diversas fuentes. Analizaremos su papel crucial en la formalización de topología algebraica, su influencia en otras disciplinas y la forma que han tomado hoy en día en las dos siguientes secciones de este artículo.

Enfoquemos por un momento la atención en las dimensiones del espacio cociente

$$\beta_i(V, f) = \dim H_i(V, f) = \dim \ker f_i - \dim \operatorname{im} f_{i+1}.$$

Estas cantidades son conocidas desde el siglo XIX y se conocen como los números de Betti, por atribución a Enrico Betti (1823-1892).

Ejercicio 1.4. *Para un complejo de cadenas*

$$0 \to V_0 \overset{f_0}{\to} V_1 \overset{f_1}{\to} V_2 \to \ldots V_i \overset{f_i}{\to} V_{i+1} \ldots V_{n-1} \overset{f_n}{\to} V_n \to 0,$$

probar que la suma con signos alternados de números de Betti satisfacen:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \beta_k(V, f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim V_k.$$

A esta cantidad se le conoce como la característica de Euler del complejo de cadenas, por atribución a Leonhard Euler (1707-1783).

2. «*Topology becomes algebraic with Noether and Vietoris*». Un problema de atribución que no debería existir.

La lectora puede encontrar implícitamente la anterior formulación del concepto de homología -con énfasis en el concepto de objeto cociente- (de un modo más general, para complejos de cadenas consistentes en módulos libres o en grupos abelianos libres) en una contribución de Emmy Noether publicada en 1926 en el reporte anual de 1925 de la Sociedad Matemática Alemana, página 104 de la sección «Mitteilungen und Nachrichten». El resultado se menciona escuetamente en una sección de anuncios de resultados de la Sociedad Matemática de Gotinga y através de esfuerzos de digitalización del archivo digital de revistas alemanas *Digizeitschriften* está disponible para su consulta en la página web `https://www.digizeitschriften.de/dms/toc/?PID=PPN37721857X`.

Fuentes reconocidas de la época, incluyendo el libro de texto de P. Alexandrov y H. Hopf, publicado en 1935, poco tiempo después de su muerte, reconocen explícitamente a Emmy Noether, su influencia en la formalización de las ideas actualmente reconocidas como básicas en la Topología Algebraica en su introducción, y de hecho esta definición se encuentra desarrollada en la reedición facsimilar de 1974 [Alexandroff and Hopf(1974)] Cap V, p. 205.

Heinz Hopf reconoce explícitamente en un artículo publicado en 1929 [Hopf(1929)] el papel fundamental de Emmy Noether en la formulación algebraica, no sólo de lo que hoy en día conocemos como el teorema de Lefschetz-Hopf, sino de los fundamentos del uso de conceptos algebraicos en homología de complejos -el concepto no está tan maduro todavía en esta época, compárese [Burde and Zieschang(1999)]-. Dejemos como evidencia del crédito que dan los autores en la introducción del libro [Alexandroff and Hopf(1974)], en la página IX de la reimpresión de 1974, en traducción nuestra, con mayúsculas de los autores originales:

> El interés por la Topología en Gotinga se concentraba sobre todo en el activo círculo matemático alrededor de EMMY NOETHER. Hoy la recordamos con agradecimiento. El entendimiento de EMMY NOETHER no se circunscribía a su campo de actividad, el álgebra, sino que ejercía influencia viva en cualquiera con quien entablara una interacción matemática. Para nosotros, esta influencia fue de la mayor importancia y se refleja en este libro. La fuerte tendencia de algebraización basada en la teoría de grupos, que seguimos en nuestra presentación se debe a EMMY NOETHER. Esta tendencia está hoy en día dada por sentada, hace ocho años no era así; fue necesario el temperamento y energía de EMMY NOETHER para hacerde esta tendencia un bien común de los topólogos, y darle el lugar que hoy juega en la topología, en sus métodos y preguntas.

Finalmente, fuentes históricas como el artículo [Weibel(1999)] atribuyen correctamente los resultados fundamentales del álgebra homológica al escueto anuncio de Emmy Noether discutido anteriormente.

Cabe entonces la pregunta: **¿Porqué no existe en este siglo XXI una atribución correcta de los puntos de vista algebraicos en topología a Noether?**

Respuestas a esta pregunta puede encontrar la lectora propuestas en esfuerzos historiográficos de los años 80 del siglo pasado por Jean Dieudonné [Dieudonné(1984)] y Saunders Mac Lane [Mac Lane(1986)]. En concreto, los expertos analizan -en ambos casos en una revista matemática especializada, no de historia de la ciencia- un ejemplo de malas prácticas de atribución de parte de W. Mayer, por oposición a los ejemplos de atribución correcta vistos anteriormente de parte de H. Hopf y Alexandrov y otros no discutidos en este artículo de parte de L. Vietoris.

Además de las malas prácticas en el manejo de información y citas, el problema tiene también indudablemente un matiz de género. Es de nuestro interés preservar la atención en este punto, que expertos anteriormente han hecho notar, pero que hoy en día se vuelve más importante en la lucha por el reconocimiento del importante papel de la mujer en la ciencia.

3. Más información

A continuación presentamos algunas sugerencias donde la lectora puede encontrar más información acerca de los temas expuestos en esta contribución.

3.1. Acerca de Emmy Noether

La figura de Emmy Noether está pasando por un período de mayor interés, de manera justificada no sólo por la validez atemporal de su obra y la arreciada necesidad de este tiempo de encontrar modelos para el protagonismo de las mujeres en la ciencia como es el de ella, sino también por el centésimo aniversario de su habilitación en 2019. Es nuestro interés hacer resonancia de este hecho en español en estas degustaciones.

Por mencionar algunas de las fuentes más interesantes hoy en día que pueden dar una idea de acerccamientos novedosos a la figura de Emmy Noether, podemos destacar:

- Los videos de Youtube de Eduardo Sáenz de Cabezón: «Las mujeres matemáticas más importantes de la historia», `https://www.youtube.com/watch?v=LnKEo8th77g` y «Cinco matemáticos que deberían ser más famosos», `https://www.youtube.com/watch?v=lvO4wuqsJF8`.
- El libro editado en 2020 «Proving it her way», de David Rowe y Mechthild Koreuber ISBN 978-3-030-62811-6. Así como el libro Emmy Noether: mathematician extraordinaire de 2021 de David Rowe, ISBN 978-3-030-63810-8. Ambos publicados en la editorial Springer.
- Para creaciones literarias y artísticas basadas en Noether:
  1. La obra de teatro «Mathematische Spaziergänge mit Noether», presentada por la iniciativa «Portraittheater». Un video de una versión sincronizada al inglés se encuentra en el siguiente video `https://www.youtube.com/watch?v=dCuqQApjUPo`.
  2. El libro «Emmy Noether: the mother of modern algebra», de Margret B. W. Tent, ISBN 978-1-568-81430-8.

En el posgrado conjunto en ciencias matemáticas UNAM-UMSNH se ofrecen de manera recurrente cursos de Topología Algebraica, Álgebra Moderna, Álgebra Homológica,Álgebra Conmutativa y Geometría Algebraica donde las contibuciones de Emmy Noether juegan un papel central.

3.2. Acerca del concepto de homología

El álgebra homológica y en particular la noción de homología juega un papel muy importante en topología algebraica [Hatcher(2002)], pero también existen tratados de álgebra homológica [Weibel(1994)].

Un enfoque moderno a la relevancia del concepto de homología se puede ver en el siguiente artículo de Quanta Magazine:

`https://www.quantamagazine.org/how-mathematicians-use-homology-to-make-sense-of-topology-20210511/`

Referencias

[Alexandroff and Hopf(1974)] P. Alexandroff and H. Hopf. *Topologie. I.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 45. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974. Berichtigter Reprint.

[Burde and Zieschang(1999)] Gerhard Burde and Heiner Zieschang. Development of the concept of a complex. In *History of topology*, pages 103–110. North-Holland, Amsterdam, 1999. doi: 10.1016/B978-044482375-5/50005-5. URL `https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1016/B978-044482375-5/50005-5`.

[Dieudonné(1984)] J. Dieudonné. Emmy Noether and algebraic topology. *J. Pure Appl. Algebra*, 31(1-3):5–6, 1984. ISSN 0022-4049. doi: 10.1016/0022-4049(84)90071-9. URL `https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1016/0022-4049(84)90071-9`.

[Friedberg et al.(1997)Friedberg, Insel, and Spence] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, and Lawrence E. Spence. *Linear algebra*. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, third edition, 1997. ISBN 0-13-233859-9.

[Hatcher(2002)] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. ISBN 0-521-79160-X; 0-521-79540-0.

[Hopf(1929)] Heinz Hopf. Über die algebraische Anzahl von Fixpunkten. *Math. Z.*, 29(1):493–524, 1929. ISSN 0025-5874. doi: 10.1007/BF01180550. URL `https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1007/BF01180550`.

[Mac Lane(1986)] Saunders Mac Lane. Topology becomes algebraic with Vietoris and Noether. *J. Pure Appl. Algebra*, 39(3): 305–307, 1986. ISSN 0022-4049. doi: 10.1016/0022-4049(86)90150-7. URL `https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1016/0022-4049(86)90150-7`.

[Weibel(1994)] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. ISBN 0-521-43500-5; 0-521-55987-1. doi: 10.1017/CBO9781139644136. URL `https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1017/CBO9781139644136`.

[Weibel(1999)] Charles A. Weibel. History of homological algebra. In *History of topology*, pages 797–836. North-Holland, Amsterdam, 1999. doi: 10.1016/B978-044482375-5/50029-8. URL `https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1016/B978-044482375-5/50029-8`.