Examen diagnóstico

Abril 2023

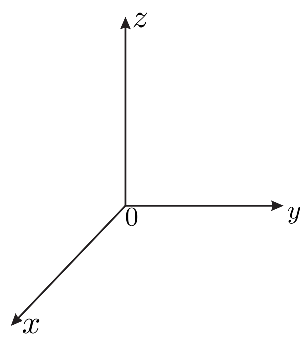
Proyecto: 4/05/2023

Resuelve los siguientes ejercicios. Escribe de manera clara y justifica tus argumentos.

1. Sea (x, y, z) un sistema de coordenadas cartesianas espaciales y sea

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

la base canónica en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.



i) Dibuja el vector OM con coordenadas $(-1, 2, 2)$, eligiendo cualquier escala.

ii) Escribe la matriz asociada a la transformación $T(x, y, z) = (2x + z, y - 2z, x - 2y + z)$ en la base canónica.

2. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x-5} & \text{si } x \neq 5, \\ 0 & \text{si } x = 5. \end{cases}$$

(a) Demuestra que $f(x)$ no es continua en $x = 5$.

(b) ¿Existe una función continua en $\mathbb{R}$ que coincida con $f(x)$ para todos los valores $x \neq 5$?

3. ¿Se intersectan las rectas l_1 y l_2 en $\mathbb{R}^3$ dadas por sus ecuaciones paramétricas

$$l_1 : x = 1 + 3t,\ y = 2 - 2t,\ z = 3 + t,\ \ t \in \mathbb{R};$$

$$l_2 : x = 4 + 5t,\ y = -2t, z = 4 + t\ , t \in \mathbb{R}?$$

Justifica su respuesta.

4. Asumamos que $v_1, \ldots, v_n$ es una base en $\mathbb{R}^n$ y que la matriz A de dimensión n por n tiene inversa. Muestra que $Av_1, \ldots, Av_n$ también es una base en $\mathbb{R}^n$.

5. Si W y U son subespacios vectoriales de V, ¿es $U \cup W$ subespacio vectorial de V? Demuestra la afirmación o da un contraejemplo.

6. Resuelva la ecuación $detA(\alpha) = 0$ si

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \cos^2\alpha & 1/4 & \cos^2\alpha \end{pmatrix}.$$

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $f\,(1,2) = (2,3)$ y $f\,(0,1) = (1,4)$. Encuentra una fórmula para f, es decir, encuentra $f\,(a,b)$ para cualquier $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

8. Encuentra los puntos en la curva $x = y^2$ que están más cercanos al punto $(1,0)$.

9. Demuestra que la ecuación $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ tiene exactamente una raíz (en los números reales).

10. Utiliza la prueba de la integral para determinar si la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$$

converge o diverge.