Examen diagnóstico

1. Considere la integral $\int_0^1 (f(x))^2 dx = 0$ donde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua. Demuestre que $f(x)$ es idénticamente nula.

2. Demuestre que la ecuación $x^5 + 10x + 3 = 0$ tiene exactamente una raíz (en los números reales).

3. Responda los siguientes incisos. Justifique su respuesta con detalle.
   (a) Sea n un número natural. Calcule $\int_{-n}^{n} x dx$.
   (b) ¿Existe $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$?

4. Sea $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ la base canónica en espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Escriba la matriz asociada a la transformación "rotación alrededor del eje que corresponde al vector e_3 por $\frac{\pi}{2}$ radianes en el sentido de las agujas del reloj". Exprésela usando la base canónica y justifique.

5. Considere una función lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $\dim \ker T = 2$ y $\dim T(\mathbb{R}^n) = m - 1$. Determine todos los posibles valores de $n, m \in \mathbb{N}$. ($\ker T \subset \mathbb{R}^n$ es el conjunto de los vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tales que $T\vec{v} = \vec{0}$.)

6. Sea V un espacio vectorial sobre un campo F. Dado $S \subseteq V$, por $\langle S \rangle$ denotamos al mínimo subespacio vectorial de V que contiene a S.
   (a) Demuestre que para cualesquiera $S, Z \subseteq V$, se tiene que $\langle S \cap Z \rangle \subseteq \langle S \rangle \cap \langle Z \rangle$.
   (b) Dé un ejemplo donde $\langle S \cap Z \rangle = \langle S \rangle \cap \langle Z \rangle$ y uno en el que $\langle S \cap Z \rangle \neq \langle S \rangle \cap \langle Z \rangle$.

7. Sea V un espacio vectorial sobre los reales. Demuestre que para cualesquiera $u, v \in V$ distintos, el conjunto $\{u, v\}$ es linealmente independiente si y sólo si el conjunto $\{u+v, u-v\}$ es linealmente independiente.

8. Responda los siguientes incisos. Justifique su respuesta con detalle.
   (a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impar y derivable en todo punto. Demuestre que para todo $b > 0$, existe $c \in (-b, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)}{b}$. (f es una función impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$).
   (b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en todo punto. Demuestre que si $f'(x) \neq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces f no puede tener 2 puntos fijos (un número a es un punto fijo de f si $f(a) = a$).

9. ¿Para qué valores a y b el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + z = a \\ -ax + (a+1)y + z = -b \\ -y + z = b \end{cases}$$
   tiene una única solución?
   ¿Para qué valores a y b el sistema tiene una infinidad de soluciones? Escriba el conjunto de soluciones en este caso.

10. Considere una función continua $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$. Demuestre que si $\inf\{f(t) : t \geq 0\} = 0$, entonces existe una sucesión no acotada, t_k tal que $f(t_k)$ tiende a 0 cuando $k \to \infty$.